R. CALIMANI - A. LEPSCHY

FEEDBACK

Guida ai cicli a retroazione:
dal controllo automatico
al controllo biologico

GARZANTI

Riccardo Calimani e Antonio Lepschy

Feedback

Guida ai cicli a retroazione:
dal controllo automatico
al controllo biologico

Garzanti

1. Cos'è la retroazione

In molte discipline si ha a che fare con «oggetti» che, in rapporto al punto di vista adottato per il loro studio, vengono chiamati «oggetti orientati» o «sistemi orientati». Il punto di vista è quello secondo cui si individuano grandezze capaci di influenzare il comportamento dell'oggetto in studio e altre che, con la loro evoluzione, ne caratterizzano il comportamento.

Le prime sono quelle che vengono di solito indicate come le *cause* e le seconde gli *effetti.* Così se si considera per esempio un corpo solido libero di muoversi e gli si applica una forza, il corpo si sposterà secondo una legge di moto che dipende dall'andamento nel tempo della forza applicata (per esempio, se la forza è costante e se sul corpo non agiscono altre forze, il moto è uniformemente accelerato). In tal caso spesso si dice che la forza è la causa e che l'accelerazione del corpo (o la sua velocità o posizione) l'effetto.

Causa ed effetto, peraltro, non sono termini molto graditi nel linguaggio scientifico, per un certo sentore di metafisicheria che rimane loro addosso.

In alcune scienze, specialmente biologiche, psicologiche o sociologiche, si parla in proposito di *stimolo* e *risposta.* In teoria dei sistemi (e discipline analoghe) si preferiscono i termini *ingresso* (*input*) e *uscita* (*output*).

Un criterio particolarmente significativo per classificare i sistemi (o gli oggetti) orientati è quello che li divide in *statici* (o istantanei) e *dinamici.*

Si parla di sistemi statici quando i valori delle uscite in un determinato istante dipendono soltanto dai valori degli

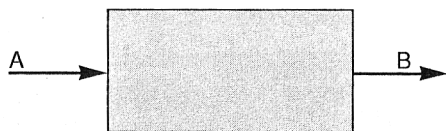



Fig. 1.1 Modo convenzionale per rappresentare un sistema orientato: un blocco rettangolare dotato di un ingresso *A* (*freccia entrante*) e di un'uscita B (*freccia uscente*).

ingressi a quell'istante, e di sistemi dinamici se esiste qualche uscita che dipende dall'andamento degli ingressi su un intervallo di tempo. All'interno dei sistemi dinamici si dicono *causali* quei sistemi in cui l'uscita dipende solo dall'andamento degli ingressi in tempi precedenti (o, che è lo stesso, l'ingresso influenza solo l'andamento futuro - o, al più, anche presente - delle uscite ma non quello passato).

I sistemi orientati possono venire collegati fra loro in vari modi. Facendo riferimento a due sistemi, ciascuno dei quali ha un solo ingresso e una sola uscita, è possibile combinarli, per esempio, in *cascata*, cioè in modo tale che l'uscita del primo coincida con l'ingresso del secondo. Un modo convenzionale di rappresentare un sistema orientato è quello di figura 1.1, in cui al sistema, considerato in sé, è associato un «blocco» rettangolare, al suo ingresso *A* una freccia entrante e alla sua uscita *B* una freccia uscente. Con questi simboli, la combinazione in cascata di due sistemi è illustrata in figura 1.2.

Un'altra combinazione semplice è quella in *parallelo* (fig. 1.3), nella quale i due sistemi sono sollecitati dallo

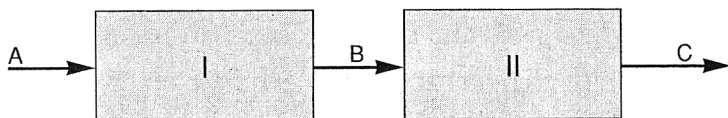



Fig. 1.2 Combinazione di due sistemi orientati collegati in cascata; l'ingresso del secondo sistema coincide con l'uscita del primo.

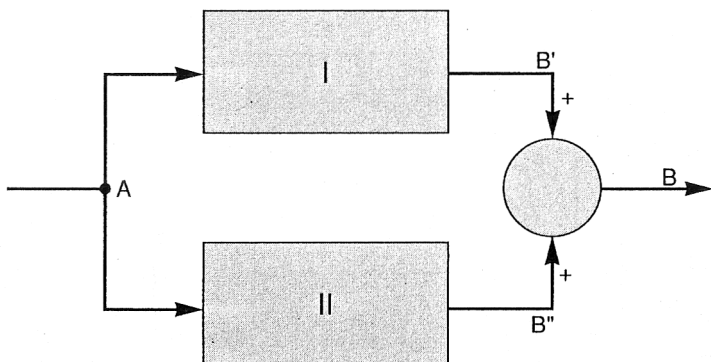



Fig. 1.3 Due sistemi orientati collegati in parallelo; l'uscita complessiva è data dalla somma delle singole uscite dei due sistemi.

stesso ingresso *A* e l'uscita complessiva *B* si ottiene sommando le uscite *B'* e *B"* fornite separatamente dai due sistemi elementari. Il blocco di forma circolare nel quale entrano due frecce, contrassegnate con il segno più e dal quale esce una sola freccia, indica l'operazione di somma.

In entrambi i casi di combinazione in cascata e in parallelo, se si è in grado di determinare l'uscita di ciascun sistema a partire dall'andamento del relativo ingresso (tenendo conto dello «stato iniziale»), non vi sono difficoltà a determinare l'andamento dell'uscita complessiva.

Nel caso della combinazione in cascata lo studio del primo sistema consente di determinare l'andamento di *B* a partire da quello di *A*; una volta noto l'andamento di *B*, lo studio del secondo sistema - condotto separatamente da quello del primo - porta a determinare l'andamento di *C*, che costituisce l'uscita del sistema complessivo.

Analogamente, nel caso della combinazione in parallelo, dato *A*, i due sistemi vengono analizzati separatamente pervenendo così alla determinazione di *B'* e di *B"*, che, sommati, danno luogo a *B*.

Esiste però un'altra possibilità di combinare fra loro

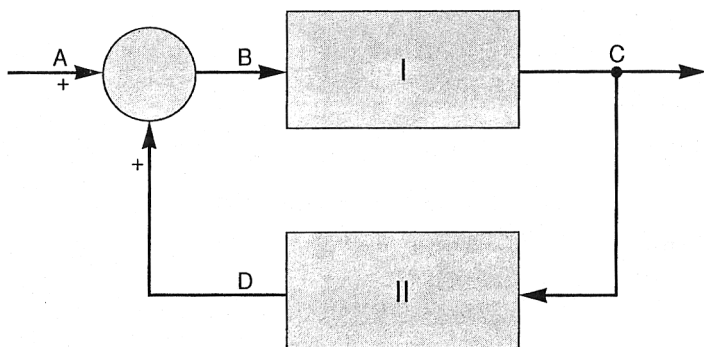



Fig. 1.4 Retroazione positiva. L'uscita del primo sistema, che coincide con l'uscita complessiva, è applicata come ingresso al secondo sistema, la cui uscita si somma con l'ingresso del sistema complessivo.

due sistemi a un ingresso e un'uscita (con l'aiuto di un sommatore) per dar luogo a un sistema risultante anch'esso a un ingresso e un'uscita, ed è quella rappresentata, in una delle varianti possibili, in figura 1.4.

In questo caso l'uscita *C* del primo sistema è l'uscita del sistema complessivo ma viene anche applicata come ingresso al secondo sistema, la cui uscita, *D*, si combina con l'ingresso *A* del sistema complessivo per dar luogo all'ingresso *B* del primo sistema.

Una combinazione di questo genere, nella letteratura tecnica di lingua inglese, è designata con il termine (ormai di uso internazionale) di *feedback*, che letteralmente significa retroalimentazione. In italiano sono stati usati allo scopo vari termini fra i quali tende a imporsi quello di *retroazione*, che verrà utilizzato in seguito.

Più precisamente nel caso della figura 1.4 si parla di *retroazione positiva*, perchè *D* si somma ad *A* per dar luogo a *B*, mentre nel caso della figura 1.5, in cui *B* è la differenza fra *A* e *D*, si parla di *retroazione negativa*.

Nello studio dei sistemi con combinazioni in retroazione non è più possibile, come nei casi precedenti, ottenere il risultato voluto studiando separatamente le parti com-

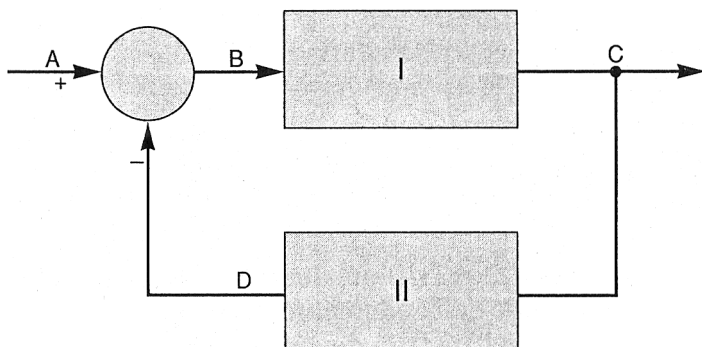



Fig. 1.5 Retroazione negativa. L'uscita del secondo sistema viene sottratta all'ingresso del sistema complessivo.

ponenti. Infatti per determinare la grandezza di uscita *C* dell'intero sistema bisogna conoscere anche l'ingresso *B* del primo sottosistema, ma *B* è dato dalla differenza fra l'ingresso del sistema complessivo *A* (che ovviamente si dovrà dare per noto) e l'uscita *D* del secondo sottosistema la cui determinazione, se si vuole tener conto *solo* del secondo sottosistema, richiederebbe la conoscenza dell'ingresso di quest'ultimo, cioè di *C*.

Ciò non significa, tuttavia, che non esista una procedura per determinare *C* noti *A* e i due sottosistemi combinati in retroazione (o se si vuole, il modo di rispondere del sistema complessivo noto il modo di rispondere dei due sistemi componenti).

Da ciò non consegue necessariamente che questa procedura debba essere di tipo iterativo (e cioè basata su una stima iniziale di *C* - o di *B*, o di *D* - e su sue successive correzioni). Consegue però che il legame ingresso-uscita del sistema complessivo (che lega *C* ad *A*) dipende dai legami ingresso-uscita dei due sistemi componenti (e cioè da quelli fra *B* e *C* e fra *D* e *C*) in modo più complesso di quello che si ha nel caso dei sistemi formati solo con collegamenti in cascata o in parallelo.

In termini intuitivi si può dire che combinando due si-

stemi in cascata o in parallelo, e combinando il sistema così formato con un terzo sistema ancora in cascata o in parallelo, e così via, il sistema complessivo conserva il ricordo dei sistemi componenti. Se si inseriscono invece combinazioni in retroazione, nel comportamento del sistema così formato si manifesta certamente qualche cosa di nuovo.

Anche partendo da pochi componenti di comportamento semplice si può ottenere un sistema di comportamento piuttosto complesso.

Per fare un esempio si supponga, anzitutto, di disporre di due elementi: l'uno con un comportamento istantaneo e l'altro con un comportamento dinamico causale. Si supponga, anzi, che questi due elementi siano quanto più semplici possibile; per esempio che nel primo l'uscita sia proporzionale all'ingresso e che nel secondo abbia luogo solo un fenomeno di accumulo. Nei casi di accumulo l'uscita, in una certa scala, coincide con l'integrale nel tempo dell'ingresso. Pensiamo per esempio al legame fra la portata di un canale che affluisce a un serbatoio e il volume di liquido «invasato» (come dicono gli studiosi di idraulica) nel serbatoio, oppure al legame fra l'intensità di corrente elettrica che fluisce in un condensatore e la carica elettrica accumulata in questo; in entrambi i casi quando l'ingresso è costante l'uscita è crescente. Il primo tipo di componente verrà detto elemento lineare e il secondo integratore.

Combinando in cascata o in parallelo integratori ed elementi proporzionali si avranno comportamenti distinti ma, tutto sommato, non troppo diversi fra loro. La varietà di comportamenti che si possono ottenere da sistemi di questo tipo è fortemente legata al numero dei componenti che vi si includono e, in particolare, a quello degli integratori.

Nei sistemi con collegamenti in retroazione, invece, anche con un solo integratore e un solo elemento proporzionale si possono ottenere comportamenti complessi e variati, quali per esempio fenomeni di crescita esponenziale

(con tempo di raddoppio costante) o fenomeni che tendono esponenzialmente a zero (con tempo di dimezzamento costante).

Combinando in retroazione due integratori si possono avere, inoltre, fenomeni di oscillazione perfettamente sinusoidali (con periodo costante e ampiezza dipendente dalle condizioni iniziali, come in un pendolo ideale), oscillazioni smorzate o oscillazioni che si autoesaltano.

Se, inoltre, si introducono semplici nonlinearità (per esempio moltiplicatori, cioè elementi istantanei la cui uscita sia proporzionale al prodotto di due ingressi) con schemi a retroazione molto semplici si possono ottenere altri comportamenti interessanti. Fra questi vi sono per esempio i fenomeni di crescita «sigmoide», una curva che prima sale sempre più rapidamente e poi sempre più lentamente, tendendo asintoticamente a un valore costante, e i fenomeni di oscillazione diversi dalla sinusoide (per esempio del tipo detto a ciclo limite) in cui rimangono costanti il periodo e l'ampiezza dell'onda alla quale l'oscillazione tende ad adeguarsi (anche partendo da condizioni iniziali diverse).

Infine riferiamoci al sistema *P* di figura 1.6, in cui si ha una retroazione unitaria. L'uscita *c* viene confrontata (sottratta) a un ingresso di riferimento *r*, ma la differenza *e* così ottenuta non agisce sul sistema direttamente, bensì tramite un opportuno «controllore» *C*, che nei casi più semplici potrebbe essere anche solamente un elemento proporzionale. Combinazioni di questo tipo possono dar luogo a fenomeni di tipo omeostatico, in cui si manifesta la tendenza a mantenere costante la grandezza di uscita, nonostante l'influenza di «disturbi» o le variazioni di parametri del sistema *P* che, in assenza dello schema di retroazione, porterebbero a farla variare; fenomeni di inseguimento, per i quali l'uscita tende a riprodurre l'andamento dell'ingresso, nonostante le varie cause, interne o esterne, che tenderebbero a rallentarlo o a deformarlo.

Queste versatili caratteristiche dei sistemi a retroazione

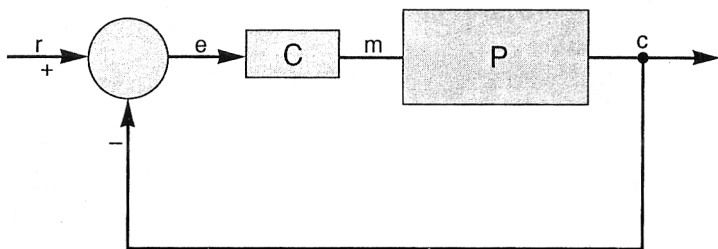



Fig. 1.6 Schema a retroazione unitaria caratteristico dei sistemi di controllo.

hanno fatto sì che essi da un lato abbiano trovato largo impiego nella tecnica (per scopi di controllo automatico, cioè per imporre il comportamento voluto a un dato impianto o a una o più grandezze che costituiscono le uscite di quell'impianto) e dall'altro si siano rivelati di grande interesse per rappresentare fenomeni studiati in varie scienze (dall'economia alla biologia) le cui caratteristiche risultano così spiegate, almeno da un punto di vista qualitativo, in maniera suggestiva ed efficace interpretandole come effetto dell'influenza reciproca di due (o più) (sotto)sistemi abbastanza semplici.

Pensando a questa duplice applicazione della retroazione, il libro è stato suddiviso in due parti, la prima dedicata alla storia degli impieghi della retroazione nella tecnica (capitolo 2) e nella matematica (capitolo 3), e la seconda, preceduta da un capitolo generale sui modelli e sul loro impiego (capitolo 4), nella quale si illustrano schemi a retroazione capaci di spiegare in modo semplice ed efficace fenomeni di interesse nelle discipline più diverse, dalla fisica (capitolo 5) all'economia (capitolo 6), alle scienze della vita (capitolo 7), per concludere con un capitolo dedicato al ruolo della retroazione nella cibernetica (capitolo 8).

2. Storia della retroazione nella tecnica

2.1 *Premessa*

La parola *feedback* è stata coniata negli anni Venti di questo secolo con riferimento ad applicazioni relative alle comunicazioni elettriche. Come spesso avviene, però, la «cosa» è nata prima della parola, e anche questa, intesa come disposizione di oggetti combinati in modo da influenzarsi reciprocamente, è nata nel campo della tecnica. In seguito il concetto di struttura a retroazione è stato utilizzato per costruire modelli interpretativi di fenomeni noti anche precedentemente.

Nella storia degli impieghi della retroazione nella tecnica si possono distinguere tre fasi:

1) la prima fase è quella in cui sono stati ideati dispositivi a retroazione per scopi di regolazione e di controllo senza che i loro inventori individuassero il fenomeno. Un po' come monsieur Jourdain, il protagonista de *Il borghese gentiluomo* di Molière, che apprende con stupore dal maestro di filosofia che, quando parla come è suo solito, «fa della prosa» e sbotta: «Son più di quarant'anni che faccio della prosa e non lo sapevo nemmeno!»;

2) la seconda fase vede lo sviluppo di una serie di altri impieghi della retroazione, di tipo diverso e per scopi diversi, in modo più consapevole ma forse ancora senza che ci si rendesse ben conto del fatto che, in queste applicazioni, si adottava lo stesso schema già impiegato nei dispositivi di controllo. È in questa seconda fase che viene coniata la parola *feedback*;

3) nella terza fase, infine, si è sviluppata una teoria dei sistemi a retroazione che ha permesso di giustificare molte delle cose che, più o meno empiricamente, erano state fatte nel passato e di capire fenomeni di non facile giustificazione intuitiva. Questa teoria è di aiuto determinante nel progettare in modo consapevole sistemi capaci di fornire le prestazioni desiderate.

Parlare di applicazioni tecniche della retroazione vuol dunque dire, in molti casi, parlare di controllo nel suo significato tecnico.

In latino medioevale la parola *contra rotulus* designava un registro di verifica in cui venivano riportati gli stessi elenchi del registro originale per garantire, mediante il confronto, che non venissero apportate modifiche arbitrarie. L'espressione latina ha dato luogo a quella francese *contre rôle* e da quest'ultima, per contrazione, si è formata la parola *contrôle*. Nella sua evoluzione semantica si è passati, come spesso avviene, dalla situazione in cui la parola designa l'oggetto materiale (il secondo registro) a quella in cui designa l'operazione (la verifica) alla quale l'oggetto è destinato.

La parola controllo è stata introdotta in italiano, nel senso di verifica, durante il periodo napoleonico assieme ad altri termini burocratici di origine francese e con i suoi derivati controllore, controlleria ecc. Per lungo tempo i puristi l'hanno avversata, considerandola un francesismo particolarmente brutto.

Lo stesso termine francese ha dato origine al tedesco *Kontrolle* e all'inglese *control*. In inglese la parola ha subito un'evoluzione autonoma passando a designare non una verifica (concetto per il quale in inglese si usano solitamente altri termini, come per esempio *check*) ma un'azione intesa a imporre un comportamento o un andamento desiderato. Questo è, tipicamente, il senso della parola in espressioni inglesi come *self-control* o *birth control*, tradotte in italiano rispettivamente come *autocontrollo* e *controllo delle nascite*. È evidente che in questi usi, anche

in italiano, controllo non indica una verifica ma, nel primo caso, un atteggiamento con il quale si impone a sé stessi un comportamento che poco conceda a reazioni emotive, e nel secondo una politica intesa a far sì che il flusso delle nascite presenti un incremento minore di quello che si avrebbe in sua assenza.

Questo significato «attivo» della parola controllo corrisponde anche al suo uso in forme, anch'esse derivate dall'inglese, che si riferiscono a contesti politici o economici come, per esempio, il controllo di una lobby su un giornale o di un gruppo di azionisti sulla politica industriale di una azienda. Tipico è il caso, inoltre, dei contesti della tecnica che qui ci interessano, e che sono quelli in cui si parla, per esempio, di *controllo di velocità* o di *controllo di temperatura*, con riferimento non a generiche verifiche ma ad azioni intese a imporre un andamento temporale voluto alla velocità di un motore o alla temperatura di un ambiente (per esempio che rimangano costanti).

Nella tecnica, in effetti, la parola controllo ha conservato anche il significato di verifica, come avviene per esempio nell'espressione *controllo di qualità*. Il primo significato, tuttavia, è di gran lunga il più diffuso e, comunque, quello che qui ci interessa. In proposito si può notare che in Italia, nonostante vari sforzi in questo senso, non vige una normalizzazione della terminologia in questo campo. Qui si userà la parola controllo in un'accezione generica e si riserverà la parola *regolazione* al significato, più specifico, in cui si vuole mantenere costante una grandezza che altrimenti tenderebbe a variare. Quando invece ci si vorrà riferire esplicitamente al caso in cui si vuol imporre a una grandezza un andamento variabile nel tempo si parlerà di *asservimento* o di *inseguimento*.

Il modo più semplice, e quello che oggi ci appare più spontaneo, per svolgere un'azione di controllo è quello di procedere, con continuità o a intervalli, al confronto fra ciò che si vorrebbe ottenere e ciò che sta di fatto avvenendo. A seconda dell'esito di questo confronto si cerca di in-

fluenzare il processo che determina la grandezza «da controllare», variandola in un senso o nel senso opposto, in modo da portarla più vicina al valore desiderato, allo scopo di ridurre lo scostamento fra il valore voluto e quello effettivo.

Ci si comporta in questo modo, istintivamente, anche in tutte le forme di controllo «manuale», cioè in quelle in cui è l'uomo che interviene direttamente per raggiungere lo scopo voluto.

Così ha fatto, fin dai primordi della storia dell'equitazione, il cavaliere che si serve alternativamente degli sproni e delle redini per far accelerare o rallentare la velocità del cavallo o per variarne la direzione. Ma così fa anche chi guida l'automobile, per esempio in un'autostrada sgombra, prefiggendosi di mantenere una velocità costante, e posa periodicamente l'occhio sul tachimetro, accentuando o diminuendo la pressione del piede sull'acceleratore, secondo che il valore indicato risulti inferiore o superiore a quello che si era prefisso.

Sostanzialmente la stessa tecnica adotta chi, volendo mantenere una temperatura confortevole in una stanza, si affida alla propria percezione diretta di caldo e freddo e agisce in conformità sulla sorgente di calore, nel caso di un caminetto aggiustando il tiraggio o ravvivando la fiamma, e, nel caso di un impianto a termosifone, manovrando la manopola del radiatore.

Sostituire l'uomo in interventi di questo tipo, lasciandogli il solo compito di specificare il valore desiderato della grandezza da controllare, nella maggior parte dei casi è piuttosto semplice e si parla allora di *controllo automatico*. L'impiego del controllo automatico nell'industria moderna è largamente diffuso. Spesso in uno stesso impianto si hanno molte catene distinte, anche se in parte sovrapposte, che provvedono al controllo automatico di varie grandezze (temperature di fluidi o di solidi, pressioni di gas o vapori, livelli di liquidi, portate di fluidi ecc.).

2.2 *I termostati di Cornelis van Drebbel*

L'impiego della retroazione per scopi di controllo, nei termini in cui lo si è descritto, sembra così ovvio che verrebbe fatto di pensare che dispositivi automatici di controllo potessero essere stati costruiti fin dall'antichità e largamente sfruttati da quei geniali inventori di automi che furono, fra gli altri, Erone e Archita. In effetti le cose non stanno così, e se anche può essere data un'interpretazione a retroazione (diretta) di ciò che avviene in numerosi meccanismi ideati e forse anche realizzati da scienziati alessandrini (Ctesibio, Filone di Bisanzio, Erone ecc.) e nel medioevo dagli arabi, le prime realizzazioni significative nell'Occidente moderno risalgono solo al 1600.

Un grande tecnico contemporaneo, che ha dato contributi importanti alla teoria dei sistemi a retroazione, l'americano Hendrik W. Bode, invitato a parlare della storia della retroazione in un convegno tenuto nel 1960, cominciò con il dire che l'idea poteva essere attribuita «a un certo Papin, che nel 1680 realizzò la pentola alla quale è stato dato il suo nome». A noi europei può sembrare strano che il celebre Papin, ideatore, oltre che della pentola a pressione, di un tipo primitivo di macchina a vapore e precursore dell'impiego di queste macchine nella navigazione, venga citato come un Carneade qualsiasi. Un certo tono di sufficienza traspare anche dal successivo commento di Bode, secondo cui l'idea di Papin di contrapporre alla forza elastica del vapore un peso, come quello di una grossa pietra, doveva essere molto più antica, e si poteva supporre che risalisse all'età — appunto — della pietra (cosa certo non verosimile, dato che per utilizzare il principio della pentola di Papin è necessario disporre di un recipiente a perfetta tenuta).

Silvio A. Bedini, curatore della divisione di Ingegneria Civile e Meccanica della Smithsonian Institution, ha scritto che il primo esempio di impiego di una tecnica a retroazione per scopi di controllo deve essere fatto risalire a

Cornelis van Drebbel, un olandese vissuto a cavallo fra i sec. XVI e XVII. Otto Mayr, anch'egli curatore alla Smithsonian Institution, conferma che quello di Drebbel fu il primo sistema a retroazione inventato nell'Europa moderna, indipendentemente dai modelli antichi.

Drebbel ideò un sistema per mantenere costante la temperatura in una fornace e per portarla a qualsiasi valore voluto. Lo applicò ad almeno due apparecchi, un'incubatrice per uova e un fornello alchimistico per riscaldare una storta. L'incubatrice era sistemata in un recipiente a doppia parete, riempito d'acqua fra le due pareti. La temperatura veniva mantenuta costante agendo sulla valvola di tiraggio della fornace. Questa valvola era comandata, mediante un gioco di leve, dallo spostamento del livello di mercurio nel ramo aperto di un tubo a U; l'altro ramo era collegato a un'ampolla riempita d'alcol e immersa nell'ambiente di cui si voleva controllare la temperatura. Se questa saliva faceva aumentare la pressione di vapore dell'alcol e provocava un abbassamento del livello di mercurio nel ramo chiuso del tubo a U e un conseguente innalzamento del livello nel ramo aperto. Attraverso le leve la valvola veniva mossa in modo da diminuire il tiraggio e quindi in modo da far ritornare la temperatura al valore desiderato. Se però questa si abbassava troppo, la diminuzione della tensione di vapore dell'alcol provocava uno spostamento in senso inverso del mercurio e, conseguentemente, una rotazione della valvola di tiraggio che portava al ravvivarsi della fiamma. Nel secondo apparecchio l'ampolla conteneva aria anziché alcol. L'*atanor a temperatura graduabile*, mantenuta costante automaticamente, è stato descritto nel suo *Journal des voyages*, da Balthasar de Monconys, un personaggio molto interessante, grande viaggiatore, che raccolse e discusse molte notizie curiose riguardanti specialmente la fisica, la chimica e l'alchimia.

Nel 1663, circa trent'anni dopo la morte di Drebbel, Monconys visitò il suo laboratorio, allora custodito dal genero di Drebbel, Johan Sibertus Kuffler, e rimase piutto-

2.1 Cornelis van Drebbel

Cornelis van Drebbel (o Drebel in una variante antica del cognome) nato ad Alkmaar nell'Olanda settentrionale nel 1572 e morto a Londra fra il 1631 e il 1634 (le fonti danno indicazioni diverse, anche se propendono per il 1633), scienziato, visse a lungo in Inghilterra, tanto che il suo nome viene spesso usato nella forma inglese Cornelius.
Cultore di varie scienze, dalla matematica alla fisica alla chimica, inventore, buon disegnatore e incisore, da alcuni fu considerato un alchimista o addirittura un ciarlatano ma da altri stimato. Fra coloro che ne ebbero stima furono particolarmente autorevoli Robert Boyle e Nicolas-Claude Fabri de Peiresc, l'erudito francese che rappresenta il punto di congiunzione fra la tradizione rinascimentale e la nuova scienza che andava allora sorgendo, che fu in rapporti con Galileo, padre Mersenne e Gassendi.
Giacomo I, re d'Inghilterra, si interessò agli esperimenti di Drebbel e nel 1604 lo chiamò a Londra dandogli uno stipendio e sistemandolo a Eltham Palace. Drebbel fu poi a Praga fra il 1610 e il 1612, su invito dell'imperatore Rodolfo II, anch'egli curioso e interessato, oltre che alla raccolta di opere d'arte, a tutto quanto riguardasse l'astrologia e l'alchimia. In seguito Drebbel tornò in Inghilterra, poi fu di nuovo a Praga, dove fu fatto imprigionare dell'Elettore Palatino Federico V, si trasferì nuovamente in Inghilterra, dove si occupò di problemi di ingegneria navale e idraulica e infine fu inviato a La Rochelle con compiti di ingegnere militare.
Scrisse opere in varie lingue, ma non ebbe una produzione molto numerosa (non scrisse nulla, in particolare, sul forno a termostato).
Gli sono state attribuite le invenzioni del microscopio, del telescopio e del termometro ma con ogni probabilità ciò è dovuto al fatto che egli introdusse questi strumenti in Inghilterra; pare, comunque che egli abbia costruito versioni originali di un microscopio composto e il suo sistema di regolazione della temperatura si basa sull'impiego di termometri (ad aria o a vapori di alcol).
Nel 1620 avrebbe costruito un sottomarino che veniva mosso da dodici rematori e che pare abbia navigato per alcune ore lungo il Tamigi (da Westminster a Greenwich) a una profondità compresa fra 12 e 15 piedi. È notevole il

fatto che, dopo questa impresa, sia dovuto passare più di un secolo e mezzo (anche se durante tale periodo vi furono vari progetti e alcuni tentativi) prima della realizzazione successiva di impegno paragonabile, che ebbe luogo nel 1776 durante la guerra di indipendenza americana.
Notevole fu anche la sua attività nelle applicazioni della chimica. In particolare si deve a lui l'impiego di sali di stagno come mordente per l'industria tintoria: il termine *color kuflerianus* con il quale lo si designava viene dal nome del genero di Drebbel, al quale egli trasmise la scoperta.
Altre sue attività ci appaiono invece sotto una luce più equivoca, e suscitarono numerose riserve nel clima positivistico del secolo scorso. Drebbel progettò una macchina per il moto perpetuo (che sfruttava le variazioni diurne di temperatura) di cui parlano parecchi suoi contemporanei da Ben Jonson a Peacham. Gli furono anche attribuite macchine per produrre pioggia, lampi, tuoni e temperature molto basse. Forse ad attività di questo tipo fu dovuto l'incidente con l'Elettore Palatino. Questo aspetto della sua fama si riflesse anche sul figlio Jacob e sul genero Kuffler, dei quali Samuel Pepys riferisce, nel suo *Diario*, che tentarono di vendere all'Ammiragliato una macchina per affondare navi nemiche.
Il giudizio che oggi si dà di Drebbel è sostanzialmente positivo: come osserva Otto Mayr, egli seppe combinare ricche doti di immaginazione, tipiche dell'età barocca, con una sobrietà e un'indipendenza di giudizio insolite; molte delle sue idee furono originali e concretamente attuabili, compresa quella relativa al moto perpetuo.

2.2 Balthasar de Monconys

Balthasar de Monconys, viaggiatore e uomo di larghi interessi e di molte curiosità, nacque a Lione nel 1611 e morì nella stessa città nel 1665. Studiò a Salamanca. Nel 1645 fu in Portogallo. Intraprese poi un viaggio che, attraverso la Provenza e l'Italia, lo portò in Egitto, Palestina, Siria, Anatolia fino a Costantinopoli, sotto la spinta di interessi filosofici e di curiosità nei riguardi delle scienze occulte, della «filosofia» di Ermete Trismegisto e di Zoroastro, delle religioni antiche. Di questo viaggio, co-

munque notevole per l'epoca, alcune fonti indicano itinerari ancora più esotici, parlando non solo di regioni dell'Arabia e della Persia (che potrebbero corrispondere all'amplificazione di modeste diversioni dal percorso in Levante e in Asia Minore) ma persino di province dell'India. Tornò in Francia nel 1649. Trattò con il papa per conto del duca di Luynes, di cui accompagnò poi il figlio, duca di Chevreuse, in un viaggio in Inghilterra, nelle Province Unite, in Germania, nel Milanese e negli stati del Duca di Savoia tra gli anni 1663-1664. Annotò le sue osservazioni nel *Journal des voyages* (Lione 1665, Parigi 1667) che fu pubblicato a cura del gesuita Jean Berthet e del Sieur de Lierges (genero o forse figlio di Monconys: le fonti non sono concordi ma è possibile che in questo caso l'espressione *fils* stia per *beau fils*, cioè genero).
Monconys venne considerato, specialmente nell'Ottocento, uomo degno di stima e molto colto per la sua epoca, ma il suo diario è stato giudicato opera pesante nello stile e troppo dettagliato nella descrizione. È comunque un'opera interessante per la quantità di curiosità scientifiche che riporta e per la descrizione di apparecchi, formule, ricette mediche e chimiche, spesso anche bizzarre.
Durante il suo viaggio in Inghilterra, nel 1663, Monconys visitò Kuffler, genero di Drebbel, che era morto circa trent'anni prima. Kuffler fu molto cortese e gli fece visitare il laboratoio che era stato del suocero, illustrandogli molte delle sue opere. Nei riguardi dell'atanor a termostato Kuffler fu però piuttosto riservato e, nonostante la sua curiosità, Monconys non riuscì a vederlo in funzione. Sul *Journal des voyages* Monconys riporta un resoconto della visita: «Ho visto un altro fornello filosofale che, quando si scalda più di quanto l'operatore desideri, senza che nessuno lo tocchi fa abbassare la paletta del registro di tiraggio, che così vien chiuso e la temperatura si abbassa fino al grado desiderato. Ma quando la temperatura è troppo bassa la paletta si alza e il registro fornisce nuova aria al fuoco, che riprende vigore e riporta la temperatura al grado necessario. Questo strumento è esterno al fornello e due o tre pollici più in basso c'è un tubo di vetro, inclinato di circa 25 gradi e grosso come una penna; nella parte inferiore c'è del mercurio e sopra solo aria. Quando questa si riscalda fa scendere il mercurio e così, a mezzo di tacche sul tubo, si può leggere la temperatura. Quando questa è troppo

bassa, l'aria «si condensa», il mercurio sale e il suo livello indica il grado «di freddo»... Ciò è quanto ho potuto vedere; infatti questo Dottore (Kuffler), per quanto sia molto cortese e, benché guercio, di fisionomia abbastanza bonaria, non voleva rivelare questo segreto e diceva che suo suocero lo stimava pari alla «grande Opera» (la pietra filosofale) e anzi diceva spesso che non lo avrebbe ceduto a chi gli proponesse in cambio l'Opera».

sto impressionato dall'atanor a termostato, ma Kuffler, consapevole dell'importanza di quella invenzione e timoroso che altri se ne appropriasse, non glielo fece vedere in funzione.

2.3 *Prima di Drebbel*

Alcuni autori francesi, tra cui P. Cossa e P. de Latil, sostengono che il primo esempio concreto di retroazione nella tecnica si debba riconoscere in un congegno di regolazione applicato ai mulini, precedente a Drebbel e descritto nell'opera di Agostino Ramelli *Le diverse et artificiose macchine*, stampata a Parigi nel 1588. Ramelli, nato nel 1531 a Ponte Tresa, sul lago di Lugano, ingegnere militare, militò sotto Gian Giacomo de' Medici e in seguito nelle milizie italiane all'assedio di La Rochelle del 1572-73, dove fu catturato dagli Ugonotti; morì fra il 1590 e il 1600. Gli autori francesi solitamente lo indicano come ingegnere militare al servizio di Enrico III, re di Francia, considerandolo quindi francese.

Il funzionamento del dispositivo descritto da Ramelli è illustrato nella figura 2.1. Una tramoggia versa il grano da macinare su un condotto quasi orizzontale diretto verso la macina. Su tale condotto il grano, se non subisce stimolazioni, non scivola verso la macina (o vi scivola molto lentamente) poiché la pendenza non è sufficiente. L'asse della macina, tenuto in rotazione dalla ruota del mulino, fa ruo-

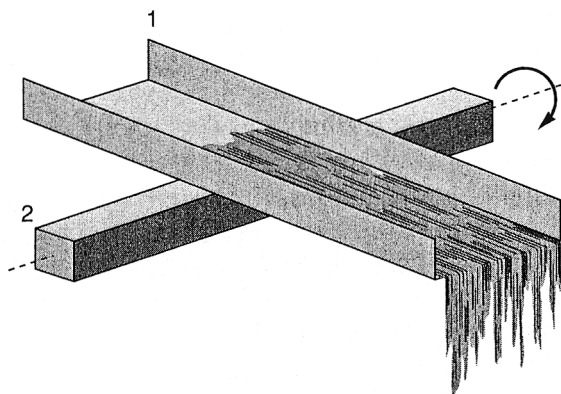



Fig. 2.1 Sistema usato nel medioevo per regolare il flusso del grano alla macina del mulino. Il travicello a sezione quadrata, mantenuto in rotazione dalla ruota del mulino, imprime piccole scosse al condotto del grano provocandone la discesa.

tare un travicello a sezione quadrata che passa sotto il condotto, imprimendogli delle piccole scosse al passaggio di ogni spigolo, che causano l'avanzamento del grano sul condotto. In questo modo, se la ruota gira più velocemente, perché la corrente d'acqua è più veloce o il vento più impetuoso, il condotto riceve più scosse nell'unità di tempo e fa defluire verso la macina una maggior quantità di grano.

Non è molto chiaro se in questo caso si possa parlare di un vero e proprio controllo a retroazione. Da un certo punto di vista, infatti, si potrebbe dire che unico scopo del marchingegno è quello di adeguare la quantità di grano inviata alla macina alla velocità che la ruota motrice imprime alla macina stessa; secondo questo punto di vista non ci sarebbe retroazione e non sarebbe neppure il caso di parlare di controllo. Se però si considera che quando alla macchina si invia più grano, ciò tende a rallentarla, allora si ha senz'altro un effetto di retroazione (una maggior velocità della ruota determina un maggiore afflusso

di grano che, a sua volta, tende a diminuirla) e una forma (sia pure grossolana) di regolazione della velocità del mulino.

Altri dispositivi che utilizzano la retroazione e che hanno avuto applicazioni tecniche precedenti al termostato di Drebbel possono essere considerati gli orologi. Un orologio meccanico (e quindi non del tipo a meridiana, a clessidra o basato sulla combustione di oli o cere) è dotato generalmente di organi che ruotano a velocità costante. Già questo fatto dovrebbe attirare la nostra attenzione perché dove vi è una regolazione (in questo caso, di velocità) è molto probabile che vi sia una retroazione.

In effetti il discorso da fare a questo proposito è più complesso. Nello schema a retroazione più semplice (fig. 1.6) la grandezza da controllare viene confrontata con un segnale di riferimento, che deve essere quindi di natura fisica omogenea a quella della grandezza (la prima può essere la posizione di un organo mobile, per esempio l'utensile di un tornio, confrontata con la posizione di un organo di riferimento, per esempio la punta che segue la sagoma da riprodurre nel caso del tornio a copiare). In altri casi è necessario «trasdurre» (fig. 2.2) la grandezza da controllare (per esempio temperatura o pressione) in una grandezza di retroazione a essa univocamente legata, che sia comodo confrontare con una grandezza di riferimento facile da generare (per esempio un segnale elettrico o la posizione di un organo meccanico).

Nel caso della regolazione di velocità, in genere non si ha a disposizione una grandezza di riferimento omogenea a quella da controllare (quale sarebbe data dalla velocità dell'albero di un dispositivo che già ruotasse a velocità costante). La soluzione più frequente (adottata anche da Watt per la macchina a vapore) consiste nel trasdurre la velocità nella posizione di un organo mobile che, per esempio per mezzo di una leva, viene confrontata con la posizione (fissa, aggiustabile o variabile in modo indipendente) di un punto di riferimento.

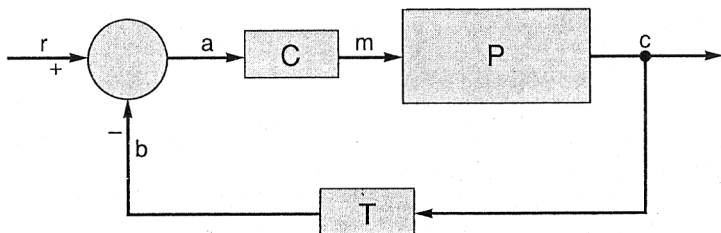



Fig. 2.2 Sistema a retroazione che utilizza un trasduttore (T) con il compito di confrontare la grandezza da controllare alla grandezza di riferimento, quando non siano omogenee.

Una soluzione alternativa è quella di riferirsi a un dispositivo che generi intervalli di tempo costanti, ai quali confrontare l'intervallo di tempo che occorre al dispositivo rotante per percorrere un dato angolo di rotazione (una frazione di giro, un giro intero o un certo numero di giri). Se questo secondo intervallo di tempo è più piccolo di quello di riferimento, ciò vuol dire che la «macchina» di cui si vuol controllare la velocità ruota più velocemente di quanto si vorrebbe e che è necessario rallentarla; se invece l'intervallo di tempo considerato è più lungo di quello campione, ciò vuol dire che la macchina ruota più lentamente del voluto e che bisogna accelerarla.

Qualche cosa di simile avviene negli orologi meccanici. Questi sono formati, sostanzialmente, da quattro parti: il *motore* (pesi o molla) che fornisce il movimento al sistema; l'*oscillatore* (pendolo o bilanciere) che, per utilizzare la schematizzazione sopra adottata, genera il riferimento e cioè una sequenza di intervalli di tempo di durata (praticamente) costante; lo *scappamento* (o *meccanismo distributore*) che collega oscillatore e motore confrontando in certo modo gli intervalli di tempo generati dall'oscillatore e quelli impiegati dal motore per effettuare una data rotazione. In base a questo confronto, lo scappamento regola il moto dell'orologio e fornisce all'oscillatore l'energia necessaria perché il suo moto periodico non si smorzi (natu-

ralmente soltanto finché il motore può produrre energia meccanica, cioè finché la molla non si è scaricata o il peso è arrivato alla fine del percorso di caduta); infine l'*indicatore*, ovvero le sfere che, con la loro posizione, forniscono la misura del tempo.

Ai nostri fini gli elementi più importanti sono il *motore* e l'*oscillatore* che interagiscono tra loro tramite lo *scappamento* dando luogo a un ciclo di retroazione. A ogni battito il motore fornisce all'oscillatore il supplemento di energia necessario a compensare le perdite dovute agli attriti, e l'oscillatore interviene periodicamente sul motore regolarizzandone il moto.

Nei primi orologi meccanici la forza motrice utilizzata era quella di pesi che cadevano, frenati dagli attriti interni della macchina e dall'azione dello scappamento. La soluzione del peso è ancora oggi vantaggiosa, in confronto a quella delle molle, nei casi in cui si disponga di un sufficiente spazio di caduta, perché fornisce una trazione uniforme. Il controllo del moto fu allora ottenuto mediante due differenti sistemi: lo *scappamento a verga con foliot* e il *bilanciere a ruota.* Carlo M. Cipolla ritiene tuttora che «il problema della priorità fra il bilanciere a ruota e il foliot non è stato risolto». Il primo figura già nel manoscritto del Dondi della seconda metà del Trecento, mentre del secondo «nessuno sa e probabilmente saprà mai» chi lo inventò, ma «quale che ne fosse il nome, si trattava di un vero e proprio genio» (A.H. Lloyd).

Il principio di funzionamento dello scappamento a verga con foliot è illustrato in modo schematico nella figura 2.3: la verga è un perno, sul quale sono montate due palette P_1 e P_2 a bandiera e una traversa, che è il foliot; sul foliot sono sistemati due pesi simmetrici, G_1 e G_2, la cui distanza dall'asse può essere fatta variare. Di fronte alla verga è sistemata una ruota a corona, con un numero dispari di denti, a forma di dente di sega, fatta ruotare dal motore dell'orologio (cioè dai pesi, legati a una corda che, durante la loro caduta, si srotola dall'asse della corona, sul quale ini-

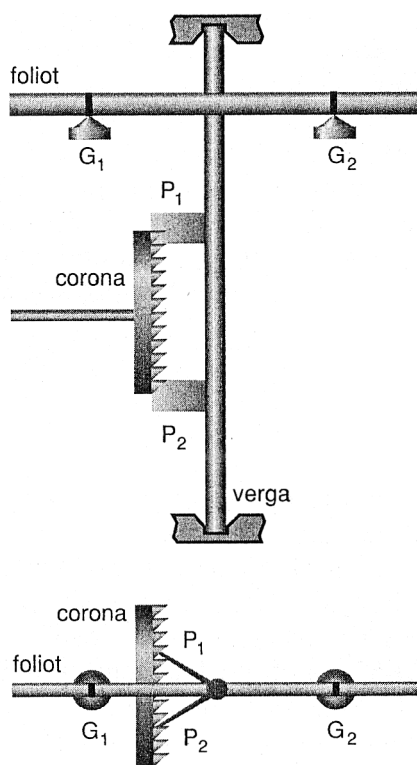



Fig. 2.3 Schema di funzionamento (*di fronte e dall'alto*) dello scappamento a verga con foliot, dispositivo di regolazione dei primi orologi.

zialmente è avvolta). Quando un dente della corona entra in contatto con la paletta P_1 dalla parte superiore della verga, imprime alla paletta, alla verga e al foliot un movimento di rotazione intorno all'asse della verga in un dato senso, che prosegue per inerzia anche quando P_1 si è disimpegnata dal dente; poco dopo (e non simultaneamente, dato che il numero di denti è dispari) un dente della parte opposta della corona entra in contatto con la paletta inferiore P_2 e imprime a paletta, verga e foliot un moto in senso inverso (se supponiamo che i denti della parte superio-

re della ruota si spostino dalla destra verso la sinistra di chi guarda la ruota nel disegno, quelli della parte inferiore si sposteranno da sinistra verso destra). La posizione dei pesi G_1 e G_2 determina il momento di inerzia del sistema verga-foliot e, quindi, da un lato l'energia che questo sistema immagazzina quando ruota a una certa velocità (e che gli è stata fornita sotto l'azione della corona e cioè dei pesi) e dall'altro il periodo di oscillazione. In luogo del foliot venne talora usato un bilanciere a ruota, che, però, ha momento d'inerzia non modificabile e quindi in tal caso, l'aggiustamento della velocità può avvenire solo modificando il peso motore.

2.4 *Dopo Drebbel*

Il discorso sugli orologi è collegato alla prima delle applicazioni della retroazione successive a Drebbel, ben nota e spesso citata: l'orologio a pendolo. Il problema aveva interessato anche Galileo, ma la prima realizzazione completa fu merito di Christiaan Huygens (1629-1695) ed ebbe luogo nel 1657. In effetti Huygens si dedicò a questo problema per tutto il decennio compreso tra il 1650 e il 1660 continuando a perfezionare il suo orologio a pendolo. Fra le altre cose ideò un pendolo cicloidale dalle oscillazioni rigorosamente isocrone (cioè della stessa durata), indipendentemente dalla loro ampiezza (a differenza del comune pendolo in cui l'isocronismo si ha solo per le piccole oscillazioni).

Inizialmente lo scappamento a verga fu combinato con il pendolo (che sostituiva, così, il foliot o il bilanciere a ruota); successivamente si adottò lo scappamento ad ancora.

L'importanza dell'orologio di Huygens risulta chiara se si pensa che negli orologi medioevali, con scappamento a verga e foliot o a bilanciere, si aveva un errore di alcuni minuti al giorno, che migliorò di pochissimo dalla metà del

Trecento alla metà del Seicento. Con l'orologio di Huygens si passa a errori di quasi due ordini di grandezza minori e cioè di meno di dieci secondi al giorno.

Un altro campo che ha visto interessanti impieghi tecnici della retroazione è quello della macchina a vapore.

Come si è già accennato, uno schema a retroazione può essere individuato nella pentola di Papin, pensata come un sistema per la regolazione della pressione del vapore. In questo caso il riferimento è fornito da un peso che, direttamente o mediante una leva, agisce sulla valvola di sfiato, sulla quale agisce anche, dall'interno della pentola, una forza di verso opposto dovuta alla pressione del vapore. Quando la pressione supera il valore desiderato, la sua azione sulla valvola prevale su quella del peso e ne determina l'apertura. Come conseguenza, per effetto dello sfiato, la pressione si riabbassa fino al valore in cui, prevalendo questa volta il peso esterno, la valvola si richiude e la pressione torna a salire.

Papin ideò e realizzò la sua pentola nel 1681; a lui si devono anche due schemi di motrici a vapore, la prima del 1690 e la seconda del 1707, quest'ultima derivante dalla macchina costruita da Savary nel 1699. La prima macchina a vapore di impiego pratico fu però quella di T. Newcomen (1705), in un modello perfezionato della quale si ebbe per la prima volta la separazione della caldaia, in cui si genera il vapore, dal cilindro in cui si muove lo stantuffo. Lo schema di principio è quello di figura 2.4: si devono aprire alternativamente (e ciò veniva fatto a mano) le due valvole V_1 e V_2 (V_1 di immissione del vapore e V_2 di immissione dell'acqua di raffreddamento nell'intercapedine intorno al cilindro). Quando V_1 è aperta e V_2 è chiusa, il vapore entra nel cilindro e spinge lo stantuffo verso l'alto. Quando invece V_1 è chiusa e V_2 è aperta nella camicia intorno al cilindro entra l'acqua che raffredda il vapore, il vapore condensa e la pressione atmosferica spinge lo stantuffo verso il basso. In questa macchina non si ha un meccanismo a retroazione, poiché il movimento delle valvole

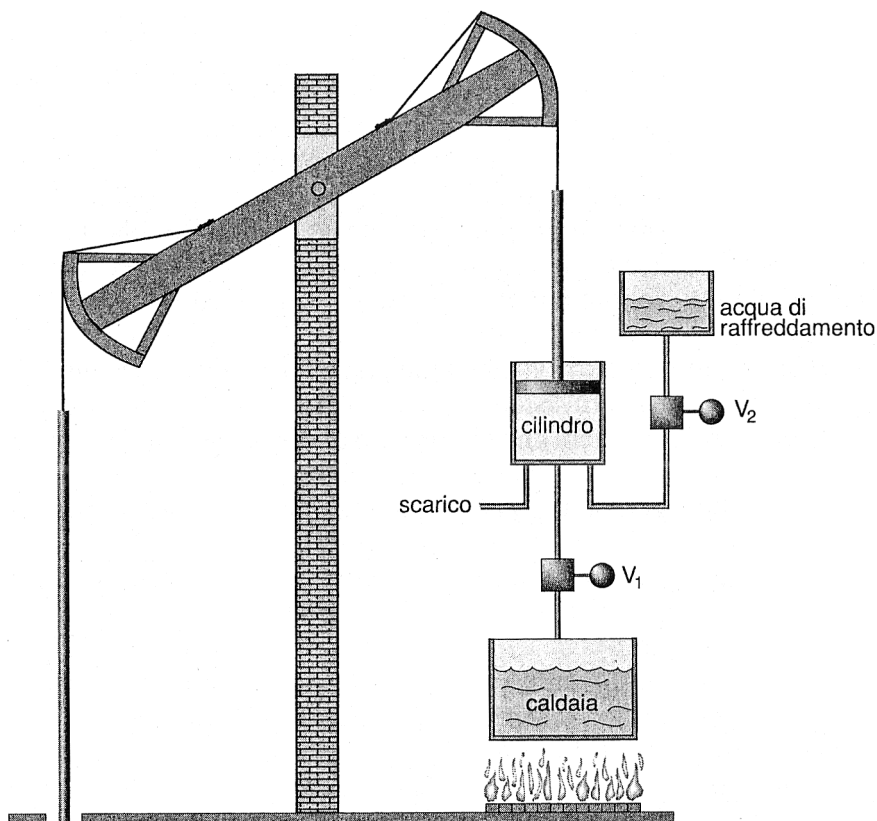



Fig. 2.4 La macchina a vapore di Newcomen (1705). Quando la valvola V_1 è aperta, il vapore passa dalla caldaia alla camera del pistone provocandone il sollevamento. L'apertura della valvola V_2 raffredda il vapore che, condensandosi, provoca il riabbassarsi del pistone.

è eseguito manualmente. La retroazione fu invece applicata da Humphrey Potter, che nel 1713 realizzò un meccanismo che comandava l'apertura e la chiusura delle valvole direttamente dal moto dello stantuffo; un aneddoto, forse senza fondamento storico, narra che Potter fosse un manovratore delle valvole di una pompa a vapore di Newcomen e che, annoiato dall'operazione tediosamente ripetiti-

va, avesse pensato di automatizzarla collegando in modo opportuno, con cordicelle e leve, le valvole allo stantuffo.

In questo caso, la retroazione non porta alla regolazione a valore costante di una grandezza (come potrebbe essere la pressione nel cilindro o la posizione dello stantuffo), ma al contrario ne favorisce una variazione alternativa, con le ampie escursioni necessarie perché la macchina possa azionare una pompa. La macchina di Potter è, per certi aspetti, il primo oscillatore a retroazione.

Scopi di regolazione, questa volta di velocità, furono raggiunti nello stesso campo da James Watt (1736-1819) nel 1787. A Watt, inventore geniale, si devono molti significativi perfezionamenti della macchina a vapore: l'ideazione del condensatore nel 1765 (il brevetto è del 1769); l'adozione della camicia di vapore intorno al cilindro; il brevetto di un ruotismo epicicloidale, ottenuto nel 1781, che consentiva di trasformare il moto alternativo in moto rotatorio; l'adozione, nel 1782, del sistema a doppio effetto e, nel 1784, quella del parallelogramma, che considerò la sua invenzione più notevole.

Il regolatore di forza centrifuga, introdotto nel 1787, non fu, in effetti, una vera e propria invenzione di Watt, perché il suo principio di funzionamento era già utilizzato in congegni impiegati per regolare la velocità delle macine nei mulini a vento.

Nel caso di quello utilizzato per la macchina a vapore si può parlare, però, di un regolatore vero e proprio, nel senso moderno del termine. Il dispositivo automatico realizzato da Watt è basato sul «trasduttore» a sfere rotanti che utilizza la forza centrifuga legata alla velocità di rotazione: quando l'albero (fig. 2.5) ruota troppo velocemente, le sfere S_1 e S_2 tendono ad allargarsi. Le bielle B_1 e B_2 collegate ai bracci che portano le sfere, fanno salire lungo l'albero il colletto, il quale, mediante un sistema di leve, comanda il cassetto di distribuzione del vapore, tendendo a farne diminuire la quantità che affluisce ai cilindri. Questo provoca una diminuzione della coppia motrice sviluppata e,

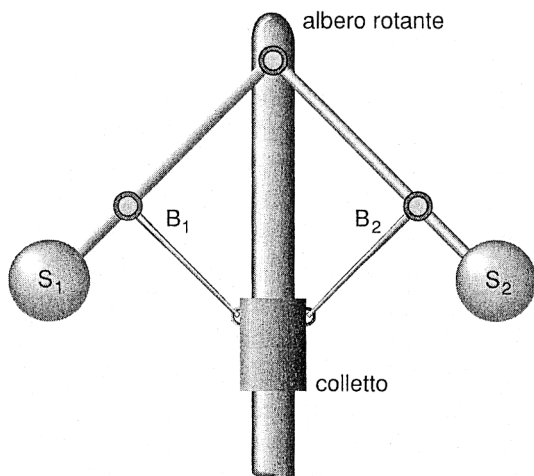



Fig. 2.5 Il regolatore impiegato da Watt (1787) per le macchine a vapore. Quando le due sfere ruotano troppo velocemente, il colletto, collegato al meccanismo di distribuzione del vapore, sale e limita l'erogazione del vapore; diminuisce così la velocità di rotazione delle sfere e il colletto si riabbassa.

di conseguenza, della velocità di rotazione. Le sfere S_1 e S_2 tendono allora ad abbassarsi, fanno abbassare il colletto che, a sua volta, sposta il dispositivo di distribuzione. In questo caso, però, se vi è stata una corretta progettazione, le pendolazioni delle sfere e del colletto tendono a smorzarsi e quindi, dopo qualche oscillazione, il sistema tende ad assumere una velocità costante.

2.5 *Dalla meccanica all'elettronica, dalla tecnica alla teoria*

Con la morte di James Watt, le cui invenzioni più significative avvengono in piena rivoluzione industriale, nella seconda metà del Settecento, siamo all'inizio del sec. XIX.

Con l'industrializzazione i problemi di regolazione e controllo di macchine e apparati sono sempre più spesso

all'ordine del giorno, ma in questa fase non è più di grande interesse seguire i perfezionamenti e gli sviluppi dei dispositivi adottati allo scopo (si veda a proposito S. Bennett, 1979).

Varrà la pena, tuttavia, di ricordare che l'astronomo inglese George Biddel Airy (1801-1892) aveva dotato i suoi telescopi di un sistema di regolazione della velocità, per consentire loro di seguire il moto apparente della volta celeste. Fu proprio a proposito di questo dispositivo che James Clerk Maxwell, il grande fisico inglese cui si devono contributi fondamentali alla teoria dell'elettromagnetismo, presentò alla Royal Society una memoria intitolata *On governors* (1867), che viene considerata la prima trattazione teorica sui sistemi di controllo, con una analisi accurata dei fenomeni che vi possono avere luogo. *Governor* è un termine dell'inglese tecnico del tempo, in uso ancora oggi, che significa regolatore o controllore; a questo proposito può essere interessante ricordare che fu proprio in omaggio a questo contributo pionieristico di Maxwell che Norbert Wiener, nel 1947, coniò il termine cibernetica (vedi capitolo 8).

Fino a questo punto si sono considerati sistemi a retroazione di tipo meccanico, realizzati fondamentalmente a scopo di controllo. La fase successiva della storia degli impieghi della retroazione nella tecnica è relativa a sistemi elettronici. In questo campo i primi sistemi a retroazione non furono realizzati per scopi di controllo in senso stretto, ma piuttosto per attribuire prestazioni volute a sistemi di telecomunicazione.

Negli Stati Uniti il primo collegamento telefonico transcontinentale, da New York a San Francisco, fu realizzato fra il 1914 e il 1915. L'attenuazione del segnale sarebbe stata inaccettabile, rendendo troppo basso il rapporto segnale/disturbo all'arrivo, quindi nel collegamento furono inserite sei stazioni di amplificazione intermedie che utilizzavano amplificatori elettronici realizzati con tubi a vuoto.

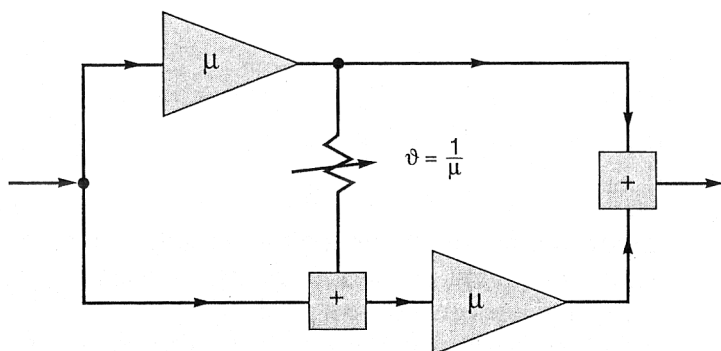



Fig. 2.6 Primo schema concepito per l'attenuazione dei disturbi nei collegamenti telefonici intercontinentali. I segnali in uscita dai due amplificatori presentano distorsioni uguali e contrarie che si annullano a vicenda.

Già in questo collegamento una delle maggiori difficoltà consisteva nelle distorsioni introdotte dagli amplificatori stessi, e dagli altri tipi di disturbo che vi avevano luogo. Harold S. Black (1898-1983) suggerì di risolvere questo problema adottando una tecnica a retroazione negativa. Black si era occupato per parecchi anni del problema dei disturbi e aveva già fornito altri contributi significativi. Quando ebbe l'intuizione della soluzione a retroazione, nella mattina del 6 agosto 1927, Black attraversava l'Hudson sul traghetto per recarsi al lavoro a Manhattan; non avendo niente di meglio sottomano, tracciò uno schizzo dello schema elettrico e delle equazioni su una pagina del «New York Times», che aveva con sé.

In effetti a Black si devono due invenzioni distinte. Nella prima, relativa allo schema di figura 2.6, si ha una compensazione della distorsione: nel canale superiore, in uscita dall'amplificatore, si ha un segnale uguale a quello di ingresso ma amplificato e distorto; attraverso un attenuatore si riporta il segnale distorto al livello di quello di ingresso, lo si somma a quest'ultimo portando poi la somma all'amplificatore del canale inferiore. Il risultato in uscita del

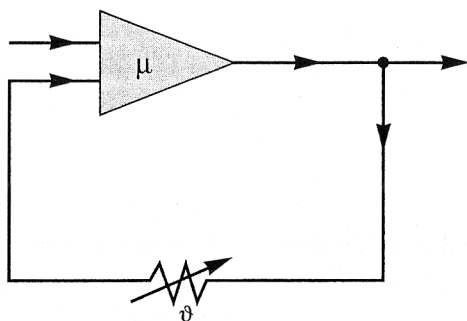



Fig. 2.7 Schema a retroazione per l'attenuazione del disturbo. Il segnale, anziché passare attraverso un secondo amplificatore come nella figura precedente, viene riportato all'ingresso dello stesso.

canale inferiore è un segnale dato da una componente utile, alla quale è sovrapposta una componente di distorsione uguale e contraria a quella introdotta dall'amplificatore del canale superiore. Sommando le uscite dei due amplificatori, i segnali utili si combinano e le distorsioni si compensano. In questo schema non si ha però retroazione; la geniale intuizione di Black, che lo portò al secondo schema (fig. 2.7), fu quella di riutilizzare l'amplificatore del canale superiore anche per svolgere le funzioni che nello schema precedente erano attribuite all'amplificatore del canale inferiore. In uscita dal primo amplificatore il segnale, opportunamente attenuato, anziché andare a un altro amplificatore, ritorna all'ingresso del primo, dove si combina direttamente con l'ingresso principale. In questo modo si ha un vero e proprio schema a retroazione. Black presentò domanda di brevetto nel 1928 e, dopo una lunga e dibattuta procedura, lo ottenne nel 1937. In quegli anni ebbero luogo moltissimi progressi anche nel campo della teoria dei sistemi a retroazione; infatti, a differenza di ciò che era avvenuto nel campo dei regolatori meccanici, trattando problemi elettrici ci si rese conto fin da principio della necessità di disporre di un apparato teorico adeguato.

Un percorso analogo si ebbe anche nel settore dei circuiti che utilizzavano tubi a vuoto per realizzare amplificatori o oscillatori per la radiotecnica (trasmettitori e ricevitori).

A questo proposito si deve tener conto del fatto che il triodo è un dispositivo invertitore: quando il segnale di pilotaggio portato all'elettrodo di controllo (la *griglia*) aumenta, il segnale utile presente all'elettrodo di uscita (la *placca*) diminuisce. Collegando in cascata due triodi, in modo che l'elettrodo di controllo del secondo sia pilotato dall'uscita del primo, per effetto del doppio cambiamento di segno, si ha in uscita un segnale corrispondente a quello di pilotaggio del primo, amplificato ma non invertito.

Così con un solo tubo, o con un numero dispari di tubi, ha luogo una retroazione negativa: il segnale che si riporta all'ingresso è di segno opposto rispetto all'ingresso, che replica in misura amplificata. Un circuito formato da due tubi, o da un numero pari di tubi, dà luogo a retroazione positiva.

La retroazione positiva può portare all'instabilità del sistema, che può mettersi a oscillare anche se in ingresso non ha ricevuto nessun comando. Questo, a seconda dei casi, può essere un inconveniente (amplificatori che fischiano) oppure l'obiettivo desiderato, nel caso in cui ciò che si vuol realizzare è, appunto, un oscillatore. La retroazione positiva tuttavia non porta necessariamente all'instabilità, nonostante l'intuizione fisica possa suggerirlo; se è contenuta in una misura corretta può dar luogo a un comportamento stabile, ma con un guadagno molto maggiore di quello dell'amplificatore non retroazionato. Nello schema con retroazione, infatti, l'amplificatore è pilotato non dal solo segnale di ingresso ma dalla combinazione dell'ingresso e di una parte dell'uscita, quindi dà senz'altro luogo a un'uscita più elevata di quella che si avrebbe in assenza di retroazione.

Concludendo si può dire che se nel campo della telefonia la retroazione negativa aveva consentito di realizzare

amplificatori a bassissima distorsione, nel campo della radiotecnica si rivelò di notevole interesse l'impiego della retroazione positiva per ottenere oscillatori e amplificatori di guadagno molto elevato.

In tutti i casi, però, come del resto si è già accennato, il comportamento del sistema è poco intuitivo e diviene necessario formulare una teoria che fornisca i metodi di analisi adeguati per prevedere il comportamento del sistema e i metodi opportuni per progettarlo affinché si comporti nel modo desiderato. Questi metodi vennero sviluppati negli anni Trenta da vari autori, fra i quali ricordiamo, in particolare, H. Nyquist (di cui si ricorda l'articolo *Regeneration theory* dove il termine *regeneration* deriva dal fatto che la retroazione positiva veniva anche detta rigenerativa), e H. Bode.

Black aveva intuito che la tecnica di retroazione da lui introdotta avrebbe potuto essere utilizzata, oltre che per lo studio di amplificatori elettronici, per i sistemi meccanici, acustici, chimici e d'altro tipo, ma soprattutto nel campo dei sistemi di controllo.

Quest'ultimo tipo di impiego si ebbe nel quadro delle ricerche interdisciplinari promosse per sostenere lo sforzo bellico degli Stati Uniti durante la seconda guerra mondiale; in particolare per la progettazione dei sistemi di inseguimento delle antenne radar e delle batterie antiaeree. Gli schemi di base utilizzati in questi campi erano, in effetti, del tipo di quelli adottati nel passato per la regolazione di velocità e per il posizionamento di organi meccanici. Le specifiche molto stringenti rendevano però molto difficile che il risultato potesse essere ottenuto basando il progetto solo sull'intuizione e sull'esperienza maturata in altri campi, nei quali si richiedevano prestazioni più modeste. Fu in questa occasione che venne applicata al controllo automatico tutta la teoria della retroazione sviluppata fino ad allora, con specifico riferimento all'elettronica, alla radiotecnica e alla telefonia. E fu anche in questa occasione che Norbert Wiener si rese conto che i fenomeni studiati nel

campo delle comunicazioni e del controllo erano profondamente analoghi a fenomeni che hanno luogo negli esseri viventi e che la stessa teoria poteva essere applicata anche allo studio di questi ultimi, almeno in prima approssimazione.

Da allora i contributi più significativi alla teoria della retroazione sono venuti soprattutto dal campo del controllo automatico. Ma questa non è più storia ma è già cronaca.

2.6 *Alcune considerazioni conclusive*

Questi brevi cenni sulla storia della retroazione e dei suoi impieghi nella tecnica si prestano ad alcune considerazioni.

I risultati raggiunti prima di Drebbel, a volte anche molto geniali, sono stati il risultato di un assiduo lavorio di artigiani che, non solo non si giovavano del supporto di una teoria ma, probabilmente, non si rendevano neppure conto della struttura a retroazione degli schemi che adottavano.

Da Drebbel a Watt (e oltre) si sono avute realizzazioni anche notevoli, sia per la genialità dei principi di funzionamento sia per l'efficacia pratica, ma sempre senza il supporto di una teoria, e ancora con una consapevolezza molto limitata. Come spesso accade dunque anche in questo caso la pratica ha preceduto la teoria, e sono state ideate soluzioni geniali ed efficaci per via puramente intuitiva.

La consapevolezza della struttura dello schema e delle peculiarità che ne conseguono è piuttosto incerta ancora nello stesso Maxwell, la cui memoria *On governors* brilla però per chiarezza, essenzialità di esposizione e pulizia formale dei risultati. Del resto non è un caso che la parola *feedback* sia stata coniata solo molto più tardi; se mancava la parola se ne può concludere che, se non la cosa, mancasse ancora almeno una precisa idea della cosa.

La teoria dei sistemi a retroazione è nata in un campo diverso da quello che, fino ad allora (ma in parte anche dopo), è stato il campo principale di applicazione della retroazione, e cioè quello del controllo e della regolazione. Non può essere considerato solo un caso, però, il fatto che in un campo moderno e nato con caratteristiche intrinseche di modernità, il campo dell'elettronica, si sia sentito molto presto il bisogno di una teoria matematica che desse conto delle cose che si stavano facendo.

Per concludere, se è vero che i meccanismi di controllo si sono basati per tanto tempo sulla retroazione, pur senza disporre di una teoria, è però anche vero che questo modo di procedere aveva dei limiti intrinseci. Lo dimostra il fatto che da meno di cinquant'anni a questa parte si sono potuti ottenere, nel campo del controllo, risultati notevoli ed efficaci solo perché esiste un apparato teorico che si sviluppa e si aggiorna continuamente.

3. La retroazione nella matematica

3.1 *Premessa*

La retroazione è di interesse, in matematica, in diversi casi. Qui verranno considerati soltanto tre esempi, ritenuti particolarmente significativi e, precisamente:

1) i cicli di retroazione presenti nei diagrammi di flusso (*flow chart*) utilizzati per rappresentare procedimenti iterativi;

2) la struttura fisica delle apparecchiature utilizzate per risolvere equazioni differenziali (da quella proposta da lord Kelvin nel 1876, che impiegava integratori meccanici, a quella dei calcolatori analogici moderni);

3) alcuni schemi tipici considerati in sede di intelligenza artificiale per l'analisi dei problemi.

3.2 *I procedimenti iterativi*

I procedimenti iterativi, parlando volutamente in termini generici e grossolani, si adottano in matematica quando, non essendo in grado di ottenere direttamente in modo esatto un risultato, vi si giunge per successive approssimazioni sempre più vicine al risultato corretto. Partendo da un dato iniziale, i procedimenti iterativi, attraverso il medesimo algoritmo di calcolo, utilizzano di volta in volta il risultato ottenuto per generare l'approssimazione successiva. In altre parole, servendoci del formalismo matematico, un procedimento iterativo è quello che, a partire da

una approssimazione iniziale x_0, costruisce una successione di valori

$$x_1 = x_0 + \delta x_0$$
$$x_2 = x_1 + \delta x_1 = x_0 + \delta x_0 + \delta x_1$$
$$\cdots\cdots\cdot$$

che si avvicinano sempre di più al risultato voluto.

Per costruire un procedimento di questo tipo bisogna disporre di:

1) un criterio per la scelta dell'approssimazione iniziale x_0, o precisamente, per verificare se x_0 sia idoneo ad assicurare la convergenza del procedimento;

2) una «formula» che consenta di passare da x_0 a x_1, da x_1 a x_2 e così via, cioè, genericamente, di passare da x_n a x_{n+1};

3) un criterio che consenta di stabilire quando arrestare il processo, cioè quando ci si è avvicinati sufficientemente alla soluzione esatta (che resta pur sempre incognita).

Per essere più chiari riferiamoci a un esempio, volutamente semplice ma concreto: si voglia calcolare il reciproco $1/A$ del numero A con una macchina programmabile che sappia sommare e moltiplicare ma non dividere. Si noti, tra l'altro, che se ci si mette in grado di calcolare il reciproco $1/A$ del numero A, si sarà capaci, programmando la stessa macchina, di farle eseguire le divisioni: infatti la divisione B/A potrà venire calcolata come il prodotto di B per $1/A$.

Si supponga che A sia diverso da 0 e (per comodità di esposizione) maggiore di 0. La soluzione $x = 1/A$ è il numero x tale che $x \cdot A = 1$. Noi ci accontenteremo di una soluzione approssimata, cioè di un numero $\hat{x}$ tale che $\hat{x} \cdot A \simeq 1$. Innanzi tutto scegliamo un numero M sufficientemente grande (per esempio 1000) e adottiamo la convenzione secondo la quale la soluzione $\hat{x}$ può essere considerata soddisfacente se il prodotto $\hat{x} \cdot A$ dista da 1

di una quantità inferiore a $1/M$. La condizione potrà essere scritta nella forma $M \cdot |1 - \hat{x} \cdot A| < 1$, equivalente alla forma $|1 - \hat{x} \cdot A| < 1/M$. Se si adotta una procedura in cui, se $x_0 < 1/A$, ovvero $x_0 \cdot A < 1$, continuano a essere minori di $x = 1/A$ anche i successivi x_n, si potrà eliminare il simbolo di valore assoluto e scrivere la condizione nella forma:

$$M \cdot (1 - \hat{x} \cdot A) < 1$$

o, meglio ancora, nella forma equivalente:

$$M \cdot (1 - \hat{x} \cdot A) - 1 < 0 \qquad (3.1)$$

Questo riconduce la verifica della condizione alla valutazione del segno (che deve risultare negativo) di un'espressione in cui figurano solo operazioni che la nostra macchina sa eseguire, sottrazioni e moltiplicazioni.

Ai fini delle considerazioni che ci interessano non è necessario indugiare sulla scelta di x_0: basterà prendere un valore iniziale positivo (come A è per ipotesi) e inferiore al valore cercato, cioè un x_0 tale che $x_0 \cdot A < 1$. Un'analisi più accurata di questo algoritmo mostra che esso converge se si sceglie x_0 in modo tale che $0 < x_0 \cdot A < 2$, condizione che include quella da noi ipotizzata; ma non è necessario entrare in dettaglio, scegliamo qui il caso più semplice.

Per esporre il procedimento possiamo pensare di scrivere il valore di x, ancora incognito, nella forma $x_0 + \delta x$; in tal modo, in pratica, consideriamo come incognita, in luogo della x, l'incremento δx da dare a x_0. Si potrà allora scrivere:

$$(x_0 + \delta x) \cdot A = 1$$

e, cioè, lasciando la sola incognita a primo membro

$$A \cdot \delta x = 1 - x_0 \cdot A$$

Da questa espressione non possiamo però calcolare δx dividendo ambo i membri per A, perché la divisione ci è interdetta: se la macchina di cui disponiamo fosse in grado di dividere, infatti, avremmo calcolato x direttamente dividendo 1 per A. Dobbiamo allora ricorrere a un accorgimento. Ricordiamo che x_0 costituisce un'approssimazione, ancorché grossolana, di A e che quindi $x_0 \cdot A = 1$. Moltiplichiamo, quindi, ambo i membri dell'ultima espressione per x_0 e otteniamo:

$$x_0 \cdot A \cdot \delta x = x_0 \cdot (1 - x_0 \cdot A)$$

Poi, ricordando che $x_0 \cdot A \simeq 1$ otteniamo δx. Non sarà l'espressione esatta dell'incremento δx, ma solo una sua approssimazione, che adotteremo come l'incremento δx_0 da dare a x_0 per ottenere la successiva approssimazione x_1:

$$\delta x_0 = x_0 \cdot (1 - x_0 \cdot A)$$
$$x_1 = x_0 + \delta x_0 = x_0 + x_0 \cdot (1 - x_0 \cdot A) =$$
$$= x_0 \cdot (2 - x_0 \cdot A)$$

Ripetendo lo stesso procedimento si calcolano gli altri elementi della successione:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cdot (2 - x_1 \cdot A) \\ x_3 &= x_2 \cdot (2 - x_2 \cdot A) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1} &= x_n \cdot (2 - x_n \cdot A) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il procedimento si dice *iterativo* appunto perché a ogni passo si torna a utilizzare la stessa formula (che, come si vede, non richiede di eseguire divisioni ma solo due moltiplicazioni e una sottrazione).

Vediamo, a titolo di esempio, un'applicazione concreta di questo procedimento. Siano $A = 3$ e $M = 1000$; si vuole cioè calcolare il reciproco del numero 3 con una precisione migliore di una parte su mille. Si adotti come prima ap-

prossimazione $x_0 = 0{,}2$. Si nota che si tratta di un'approssimazione per difetto; infatti $x_0 \cdot A = 0{,}2 \cdot 3 = 0{,}6 < 1$. Inoltre l'impiego della (3.1) mostra che questa approssimazione, scelta arbitrariamente, non è subito accettabile, infatti:

$$M \cdot (1 - x_0 \cdot A) - 1 = 1000 \cdot (1 - 0{,}2 \cdot 3) - 1 = 399 > 0$$

Si deve quindi usare la (3.2) per calcolare x_1 che risulta:

$$x_1 = 0{,}2 \cdot (2 - 0{,}2 \cdot 3) = 0{,}28$$

Neppure x_1 soddisfa la condizione (3.1), infatti si ha:

$$1000 \cdot (1 - 0{,}28 \cdot 3) - 1 = 159 > 0$$

Si riapplicherà quindi ancora la (3.2) ottenendo:

$$x_2 = 0{,}28 \cdot (2 - 0{,}28 \cdot 3) = 0{,}3248$$

Anche in questo caso la condizione (3.1) non è soddisfatta, infatti:

$$1000 \cdot (1 - 0{,}3248 \cdot 3) - 1 = 24{,}6 > 0$$

Si applica infine ancora una volta la (3.2) ottenendo:

$$x_3 = (2 - 0{,}3248 \cdot 3) = 0{,}33311488$$

Questa volta l'approssimazione è accettabile perché la (3.1) dà:

$$1000 \cdot (1 - 0{,}33311488 \cdot 3) - 1 = - 0{,}34464 < 0$$

In altre parole $x_3 = 0{,}33311488$ rappresenta un'approssimazione del reciproco di 3 che ha le caratteristiche volute, cioè, come si è detto, è tale che il suo prodotto per 3 dista

da 1 di meno di un millesimo (le sue ultime cifre non sono quindi significative).

Vediamo ora di rappresentare quello che si è fatto con un diagramma di flusso (*flow chart*) del tipo utilizzato in informatica. Nei diagrammi di flusso ogni blocco rappresenta un passaggio logico. Un blocco rettangolare rappresenta una operazione da eseguire (nel nostro caso il calcolo della formula (3.2)), mentre un blocco a losanga, con due possibili uscite, rappresenta una condizione da verificare (la formula (3.1) dell'esempio). L'uso dei diagrammi di flusso per esprimere l'esempio precedente porta allo schema di figura 3.1.

La figura rappresenta l'esempio numerico e dunque le sole operazioni di iterazione che portano al valore di x_3, che con le scelte di x_0 e di M date, si sono rivelate sufficienti. Lo schema generale, che rimane valido per ogni scelta delle condizioni iniziali, è dato nella figura 3.2.

La figura 3.2 è particolarmente interessante: in essa compaiono una sola volta le procedure che nell'esecuzione concreta del calcolo vengono ripetute più volte, ma inserite in un *ciclo di retroazione*. È facile rendersi conto che cicli di questo tipo compaiono ogni volta che si adotta un procedimento iterativo e ciò mette in evidenza quanto si era affermato all'inizio circa il legame intrinseco fra procedimenti iterativi e retroazione.

Il problema è stato studiato da questo punto di vista in modo rigoroso in un lavoro del 1971 da Dana Scott in cui viene sviluppata una teoria matematica della computazione basata sulla teoria dei reticoli e in particolare sull'impiego di funzioni continue definite su reticoli completi. Dopo aver introdotto un'algebra dei diagrammi di flusso, Scott prende in considerazione i cicli (in inglese *loop*) e altri tipi di diagrammi infiniti; trattando poi della semantica dei diagrammi di flusso si sofferma sul significato di un particolare ciclo iterativo, che in inglese viene detto *while loop*. Senza approfondire il discorso, che richiederebbe tecnicismi presumibilmente non graditi alla maggioranza

Parto da
X0= 0,2
NO
X0 soddisfa la
M(1–X0•A)–1< 0?
SI
Calcolo
X1=X0• (2–X0•A)=
= 0,28
NO
X1 soddisfa la
M(1–X1•A)–1< 0?
SI
Calcolo
X2=X1• (2–X1•A)=
= 0,3248
NO
X2 soddisfa la
M(1–X2•A)–1< 0?
SI
Calcolo
X3=X2• (2–X2•A)
= 0,33311488
NO
X3 soddisfa la
M(1–X3•A)–1< 0?
SI
STOP
X3 è l'approssimazione
cercata

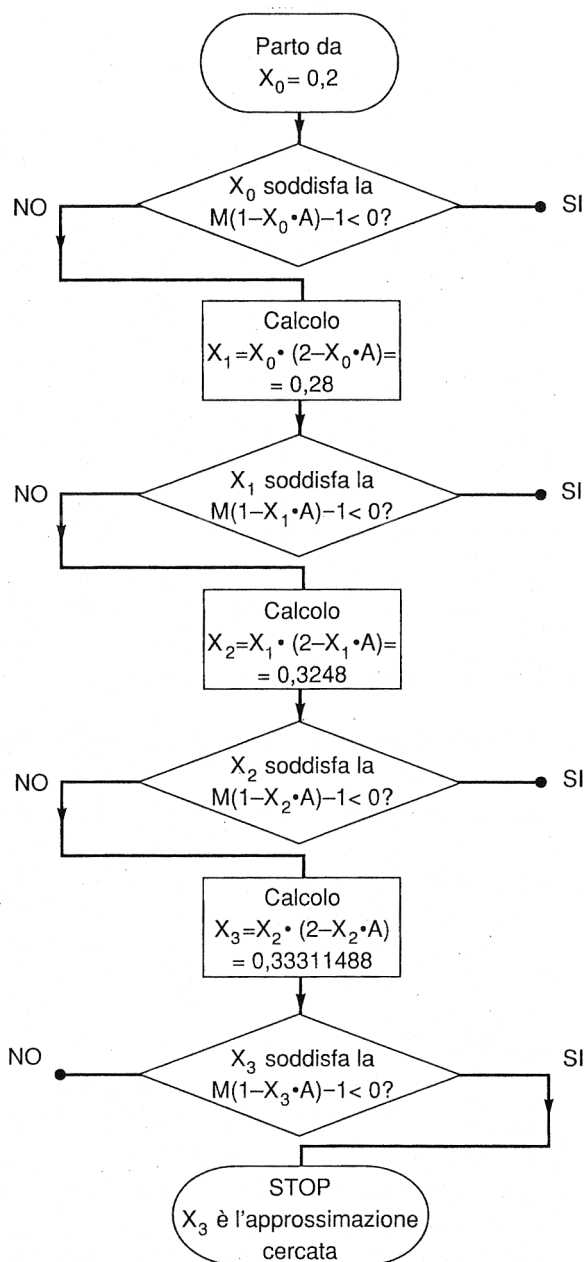



Fig. 3.1 Diagramma di flusso per il calcolo del reciproco di 3 con una precisione superiore a una parte su mille. Il numero di passi è limitato: il diagramma termina quando la condizione viene soddisfatta.

dei lettori, si riportano da quel lavoro alcune frasi introduttive, che mettono bene in rilievo l'importanza che la retroazione viene ad avere nel calcolo, tramite l'impiego di questi cicli. L'autore si riferisce allo schema di figura 3.3 che corrisponde a quello della figura 3.2 in una situazione generica. «In questa figura», egli dice, «vediamo la più nota delle strutture di un diagramma di flusso che consente all'informazione di fluire secondo un percorso ciclico: il cosiddetto *while loop*. Esso rappresenta, come tutti sanno, una delle idee più tipicamente fondamentali dei linguaggi di programmazione. Intuitivamente il concetto è uno dei più semplici: l'informazione entra ed è sottoposta a una verifica per mezzo del criterio b_0. Se la verifica dà esito insoddisfacente l'informazione viene manipolata (nel modo indicato dal blocco f_0) ed è riportata all'indietro, per subire di nuovo la verifica, ricircolando lungo il ciclo. Finché la verifica dà esito insoddisfacente, la circolazione continua. Alla fine gli effetti accumulati dalle successive manipolazioni fanno sì che la prova dia esito soddisfacente (purché

Fig. 3.2 Diagramma di flusso per il calcolo del reciproco di un numero. Il ciclo a retroazione permette di ripetere l'operazione rappresentata dal blocco rettangolare ogni qual volta non sia verificata la condizione rappresentata dal blocco romboidale.

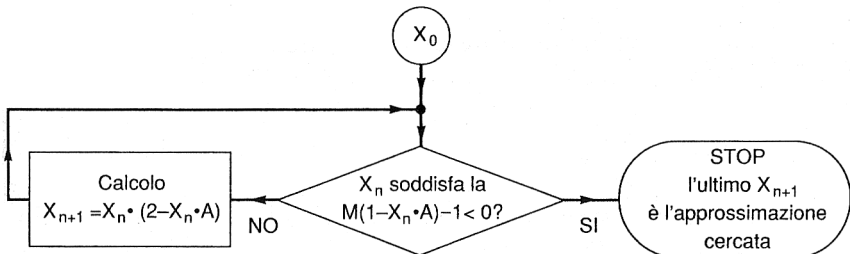
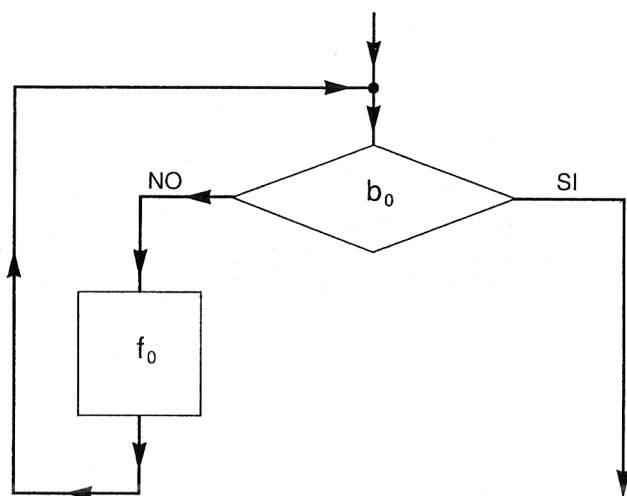



Fig. 3.3 Ciclo a retroazione inserito in un diagramma di flusso generico. L'informazione percorre il ciclo finché la condizione rappresentata dal blocco romboidale non viene soddisfatta.

il procedimento consenta questo risultato) e l'informazione esce». Il ciclo dunque è qualche cosa di essenzialmente diverso dai diagrammi finiti, costituiti da un numero finito di rami in cascata o in parallelo, e corrisponde a una sorta di caso estremo, di «abbreviazione», di un diagramma infinito, rappresentato in figura 3.4.

3.3 *Le macchine per risolvere equazioni differenziali*

Nei rendiconti della seduta del 3 febbraio 1876 della Royal Society compaiono tre contributi di William Thomson, meglio noto come lord Kelvin, che segnano una data molto importante nella storia delle applicazioni della retroazione.

Nella prima di queste note lord Kelvin racconta di aver affrontato il problema di calcolare, con un apposito dispositivo meccanico, l'integrale del prodotto di due funzioni e

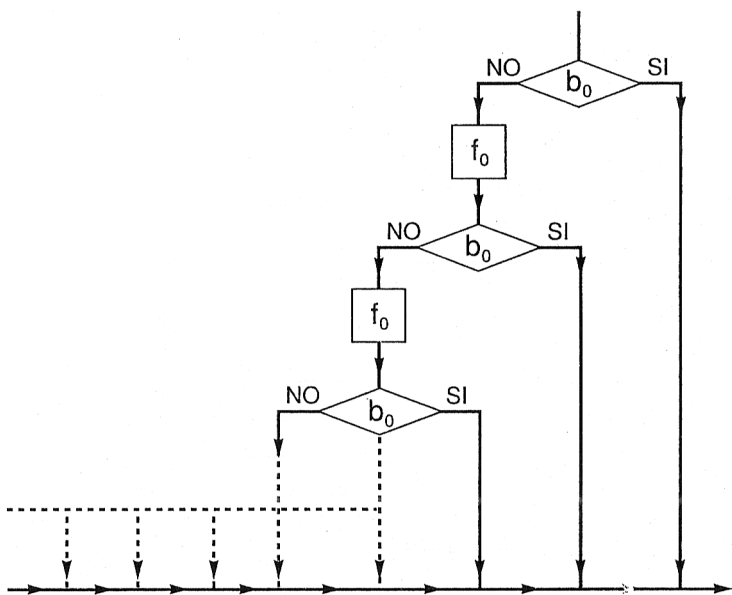



Fig. 3.4 Rappresentazione di un ciclo di operazioni che si ripetono attraverso un diagramma di flusso indefinito.

di averne poi parlato con suo fratello, James Thomson, che, alcuni anni prima, aveva ideato un integratore meccanico, di cui non aveva pubblicato la relazione. Nella seconda nota mostra come ci si possa servire dell'integratore meccanico inventato da suo fratello per risolvere equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Nella terza nota, infine, estende il risultato alla soluzione di equazioni differenziali lineari di qualsiasi ordine.

L'applicazione della retroazione che ci interessa è esposta nella seconda nota.

A questo punto risulterebbe complicato procedere nel discorso senza introdurre nozioni matematiche quali quelle di derivata e di integrale; si chiede perciò al lettore il quale non abbia dimestichezza con questi concetti, di cercare di seguire lo stesso lo spirito del discorso che, alla luce di quanto detto nel paragrafo precedente a proposito dei metodi iterativi, può esser facilmente afferrato.

Nella sua nota lord Kelvin comincia con il ricordare che una generica equazione differenziale lineare del secondo ordine può essere scritta nella forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{P}\cdot\frac{du}{dx}\right)= u(x) \tag{3.3}$$

dove P è una funzione nota della variabile x e $u(x)$ è la funzione incognita nella cui determinazione consiste la soluzione dell'equazione differenziale. Mette poi in evidenza l'interesse di questo tipo di equazioni in molti campi della fisica matematica, dal moto delle corde vibranti alle oscillazioni nei fluidi alla propagazione del calore. Infine espone il procedimento di soluzione meccanica che vuole adottare. Questo parte dal presupposto secondo cui la (3.3) può essere scritta nella forma:

$$u(x)=\int_0^x P\,[C+\int_0^\xi u(\zeta)\,d\zeta]\,d\xi \tag{3.4}$$

Ovviamente non si tratta della soluzione, perché la funzione incognita $u(x)$ compare anche al secondo membro. Però la (3.4), disponendo della «macchina» capace di eseguire l'integrale del prodotto di due funzioni, fornisce il punto di partenza per una procedura di soluzione iterativa. Si parte da un andamento di primo tentativo attribuito alla $u(x)$, che chiamiamo $u_1(x)$; lo si «inserisce» in un primo integratore meccanico I_A (figura 3.5) che fornisce la funzione:

$$Q(\xi)=\int_0^\xi u_1(\zeta)\,d\zeta + C$$

Poi, usando un secondo integratore I_B e sfruttando la capacità della macchina di eseguire l'integrale del prodotto, si ottiene la funzione:

$$u_2(x)=\int_0^x P(\xi)\,Q(\xi)\,d\xi$$

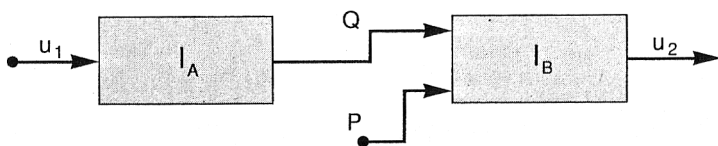



Fig. 3.5 Approssimazione di secondo ordine della soluzione di una equazione differenziale. La funzione u_1 viene fatta passare attraverso il primo integratore; il suo risultato, moltiplicato per P, viene fatto passare per il secondo integratore, la cui uscita è la seconda approssimazione u_2.

La funzione $u_2(x)$ viene considerata la seconda approssimazione della soluzione $u(x)$. A sua volta la $u_2(x)$ viene sottoposta allo stesso procedimento attraverso il quale si era fatta passare la $u_1(x)$, e continuando iterativamente si ottiene:

$$u_2(x) = \int_0^x P(\xi)\,[C + \int_0^\xi u_1(\zeta)\,d\zeta]\,d\xi$$
$$u_3(x) = \int_0^x P(\xi)\,[C + \int_0^\xi u_2(\zeta)\,d\zeta]\,d\xi$$
$$u_4(x) = \int_0^x P(\xi)\,[C + \int_0^\xi u_3(\zeta)\,d\zeta]\,d\xi$$
$$\dots\dots\dots$$

Lord Kelvin suggeriva di scegliere l'approssimazione iniziale $u_1(x)$ uguale a x.

Quando la funzione $u_{n+1}(x)$ non differisce apprezzabilmente da $u_n(x)$, che immediatamente la precede nella successione, la si potrà considerare un'approssimazione soddisfacente di $u(x)$. Infatti se

$$u_n(x) \simeq u_{n+1}(x)$$

l'equazione che ci dà la $u_{n+1}(x)$, e cioè la

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x P(\xi)\,[C + \int_0^\xi u_n(\zeta)\,d\zeta]\,d\xi$$

potrà essere scritta nella forma:

$$u_{n+1}(x) \simeq \int_0^x P(\xi)\,[C + \int_0^\xi u_{n+1}(\zeta)\,d\zeta]\,d\xi$$

Questa differisce dalla (3.4), relativa alla soluzione esatta $u(x)$, solo perché i due membri sono «circa uguali» anziché esattamente uguali.

Esaminando quello che si è fatto, si può riconoscere che si è eseguito lo schema delle figure 3.3 e 3.4. L'operazione indicata in quelle figure con f_0, anziché nell'impiego di un algoritmo di calcolo vero e proprio, consiste in questo caso nel manipolare con la macchina di figura 3.5 (costituita da due integratori I_A e I_B) la funzione $u_{i+1}(x)$ ($i = 1$, 2...), per trasformarla nella funzione $u_{i+1}(x)$. Il criterio indicato con b_0 nelle figure 3.3 e 3.4 consiste nel verificare se l'ultima u_{i+1} ottenuta è «abbastanza» vicina alla u_i immediatamente precedente. Il confronto può essere fatto semplicemente in modo qualitativo o, preferibilmente, con un sistema più preciso; per esempio si possono sovrapporre le due curve corrispondenti a u_{i+1} e a u_i e verificare se la distanza fra ciascun punto di u_i e di u_{i+1}, corrispondenti allo stesso valore di x, si conserva al di sotto di un dato intervallo di tolleranza.

Il procedimento di lord Kelvin fino a questo momento corrispondeva, in effetti, allo schema di figura 3.4, nel quale l'«albero» di manipolazioni e di decisioni viene percorso dall'alto verso il basso fino al punto in cui il criterio b_0 consente di considerare concluso il procedimento. A questo punto però egli ebbe un'intuizione geniale, che potremmo descrivere come il passaggio dallo schema di figura 3.4 a quello di figura 3.3, affidando alla «macchina» non solo il compito di svolgere la manipolazione f_0 ma anche quello di riportarne «all'ingresso» il risultato per eseguire nuovamente f_0. Egli diede cioè alla macchina la configurazione indicata schematicamente in figura 3.6, dove l'uscita dell'integratore I_B coincide con l'ingresso dell'integratore I_A. Forzando ingresso e uscita a coincidere essi non possono che assumere la forma $u(x)$ della soluzione esatta dell'equazione differenziale (3.3).

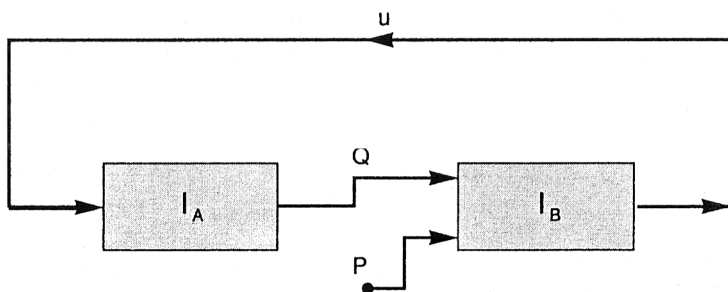



Fig. 3.6 Schema a retroazione della macchina di lord Kelvin per risolvere le equazioni differenziali.

Si legge nella nota di lord Kelvin: «Ero arrivato a questo punto» (cioè all'impiego iterato dello schema di figura 3.5, *n.d.a*) «ed ero soddisfatto perché ero convinto di esser riuscito a fare ciò che desideravo da molti anni. E qui capitò una gradevole sorpresa. Forzare la coincidenza fra la funzione inserita nella doppia macchina e quella che essa dà in uscita. Ciò vien fatto con un collegamento meccanico che vincoli il moto del centro della sfera del primo integratore della doppia macchina a coincidere con quello della superficie del cilindro del secondo integratore. Il moto di questi due organi coinciderà necessariamente con la soluzione della (3.3). Ero così arrivato a una conclusione assolutamente imprevista e mi sembra molto notevole il fatto che un'equazione differenziale del secondo ordine, a coefficienti variabili, possa essere risolta da una macchina, in modo rigoroso, con continuità e in una sola passata». In queste ultime parole è contenuto, in effetti, il motivo per il quale si è voluto parlare qui della macchina «analogica» di lord Kelvin, dandole un rilievo autonomo rispetto ai procedimenti considerati nel paragrafo precedente.

In effetti un procedimento iterativo, quale può essere implementato anche su un elaboratore digitale, segue lo schema ad albero di figura 3.4. Nel caso specifico, partendo dalla prima approssimazione $u_1(x)$ si calcolerebbero

$u_2(x)$, $u_3(x)$ e così via fino a trovare una $u_{i+1}(x)$ «abbastanza» simile alla funzione $u_1(x)$ determinata al passo immediatamente precedente.

La retroazione c'è ma, si potrebbe dire, essa si manifesta a livello concettuale piuttosto che a livello materiale; è presente, infatti, nello schema «sintetico» di figura 3.3 che compendia, almeno potenzialmente, l'albero di figura 3.4 (che è di estensione infinita anche se, in ogni caso concreto, viene percorso solo lungo il numero finito di rami che portano da u_1 a u_{i+1}).

Nel caso della macchina di lord Kelvin, invece, la retroazione è presente a livello fisico (come mostra la figura 3.6) ed è proprio in ragione di questo fatto che la macchina viene forzata a dare in uscita direttamente e subito la soluzione definitiva. La «gradevole sorpresa» provata da lord Kelvin deve essere appunto consistita nel rendersi conto che, partito dall'esigenza di meccanizzare un procedimento iterativo, era giunto invece a uno schema non più iterativo, ma diretto.

Come spesso accade, l'invenzione di lord Kelvin ha più valore in linea teorica che per le sue effettive applicazioni pratiche. Non risulta infatti che essa abbia avuto larga diffusione e un suo impiego concreto fu probabilmente ostacolato in maniera determinante dalla difficoltà di far funzionare in modo efficiente e preciso congegni complicati e delicati, con trasmissioni del moto per attrito fra superfici, come gli integratori meccanici.

Ciò non toglie che l'idea sia da considerare molto brillante. Allo stesso principio si fece ricorso nel nostro secolo, soprattutto negli anni Cinquanta, nei calcolatori elettronici analogici, che furono anche chiamati analizzatori differenziali in quanto il loro impiego più significativo consisteva appunto nella soluzione di equazioni differenziali.

In queste macchine la retroazione è utilizzata a due distinti livelli: sono dispositivi a retroazione i loro componenti più significativi (integratori e sommatori) e sono a

retroazione gli schemi (come quello di figura 3.6) secondo i quali questi componenti sono collegati fra loro.

Per una descrizione della struttura e del funzionamento dei calcolatori analogici si rinvia alla scheda 3.1.

3.4 *Schemi a retroazione nell'analisi dei problemi*

La teoria della soluzione dei problemi (*problem solving*) costituisce un ramo dell'intelligenza artificiale. Un suo capitolo di notevole importanza è dedicato alla rappresentazione e all'analisi strutturale dei problemi; questa ha lo scopo di esplorare la possibilità di *riformulare* un problema assegnato, riportandolo a un altro di più facile soluzione, o di *decomporlo* in sottoproblemi più semplici da risolvere (non solo singolarmente ma anche globalmente). Formalmente un *problema* P è un oggetto astratto che consiste di:

a) un insieme di dati D;

b) un insieme di soluzioni S e una famiglia Z di sottoinsiemi di S;

c) un'applicazione $n: D \rightarrow Z$, detta funzione intrinseca di P.

Un *problema composto PC*, di ordine q, è una quintupla $(P, D_g, S_g, \Gamma, \sigma)$ dove:

a) $P = (P_1, P_2, ... P_q)$ è l'insieme dei sottoproblemi;

b) D_g e S_g sono rispettivamente l'insieme dei dati e quello delle soluzioni;

c) Γ è l'insieme delle funzioni di interazione;

d) σ è la funzione delle soluzioni di uscita.

Qui tuttavia non ci si vuole addentrare nell'analisi dei problemi composti, e ci si limiterà a presentare in modo intuitivo alcune nozioni, essendo l'obiettivo limitato a mostrare che anche in questo campo gli schemi a retroazione hanno una notevole importanza.

In termini non formali un problema consiste nel passare dall'insieme dei dati di partenza, assegnati all'interno di

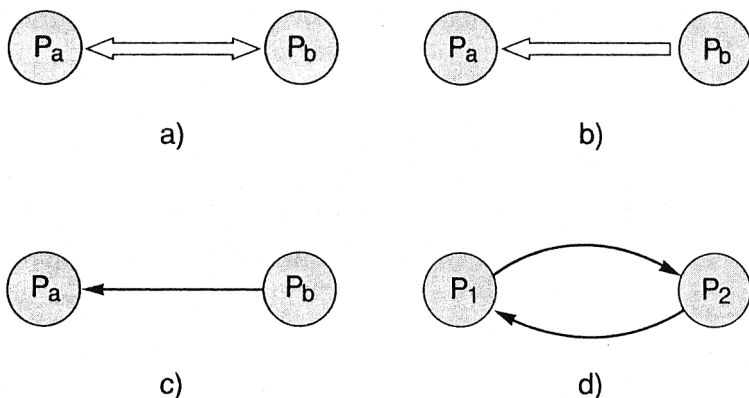



Fig. 3.7 Rappresentazione schematica delle relazioni possibili tra due problemi. Due problemi sono equivalenti (*a*) se a ogni soluzione del primo corrisponde una soluzione del secondo e viceversa. Il secondo domina il primo (*b*) se a ogni soluzione del primo corrisponde una soluzione del secondo ma non viceversa. Il secondo precede il primo (*c*) quando il primo non può essere risolto senza che venga precedentemente risolto il secondo. Infine (*d*) i due problemi si precedono a vicenda.

una determinata famiglia, all'insieme delle soluzioni, che corrispondono a quei dati, e che devono anch'esse appartenere a un insieme precisato a priori.

I problemi vengono indicati con il simbolo P_i e rappresentati convenzionalmente con cerchi (si vedano le figure 3.7-3.11). Ciascun problema è caratterizzato dal corrispondente insieme dei dati, che ne definiscono il contesto, e dalla indicazione di un obiettivo: la soluzione del problema consiste, appunto, nel conseguimento di tale obiettivo.

Due problemi P_a e P_b possono essere indipendenti o legati fra loro secondo diversi tipi di relazione: si dicono *equivalenti* se a ogni soluzione di P_b corrisponde una sola soluzione di P_a e a ogni soluzione di P_a corrisponde almeno una soluzione di P_b (vedi figura 3.7a). Si dice che P_b *domina* P_a se a ogni soluzione di P_b corrisponde almeno una soluzione di P_b (vedi figura 3.7b), e che P_b *precede* P_a se

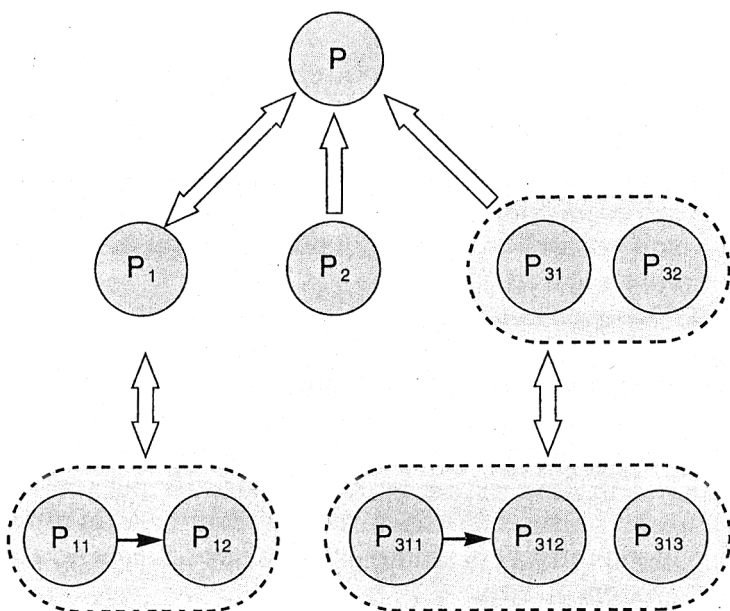



Fig. 3.8 Un problema originale può essere risolto direttamente oppure tramite una qualunque delle sue riformulazioni, in un problema o in un gruppo di problemi, equivalenti o dominanti.

qualche dato di P_a dipende da almeno una soluzione di P_b, e quindi P_a non può essere risolto senza prima risolvere P_b (vedi figura 3.7c). Quando un problema non può essere risolto in maniera diretta si dovrà cercare di riformularlo, ovvero di trovare uno o più problemi, di cui si è in grado di trovare la soluzione, che siano, nel loro complesso, equivalenti o dominanti rispetto al problema principale. Naturalmente si possono formulare più problemi che, individualmente o a gruppi, equivalgano al problema originale o lo dominino.

Un esempio è riportato nello schema della figura 3.8. Il problema originale è P. Per riformularlo si possono ugualmente considerare il problema P_1, equivalente a P, il problema P_2 che lo domina, o l'insieme dei due problemi P_{31} e

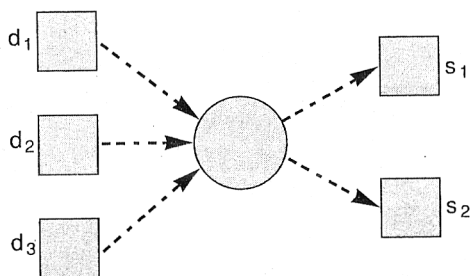



Fig. 3.9 Rappresentazione formale di un problema (blocco circolare), dei suoi dati (*d*, frecce entranti) e delle sue soluzioni (*s*, frecce uscenti).

P_{32} che, nel loro complesso, dominano P, e che sono indipendenti fra loro. A sua volta il problema P_1 può essere riformulato nei due problemi, P_{11} e P_{12}: questi sono, nel loro complesso, equivalenti a P_1, e quindi a P, ma non sono indipendenti, in quanto P_{11} precede P_{12}. Dei due problemi indipendenti P_{31} e P_{32} (che globalmente dominano P) se ne riformula uno solo, P_{31}. Questo dà luogo a tre problemi che nel loro complesso gli sono equivalenti, di cui uno è indipendente e degli altri due uno domina l'altro. Se non si riesce a risolvere P, si potrà cercare di risolvere P_1, oppure P_2, oppure l'insieme di P_{31} *e* P_{32} oppure ancora i problemi a questi equivalenti. Schemi di questo tipo vengono chiamati *grafi AND-OR* appunto perché esprimono le alternative di soluzione dei problemi utilizzando operazioni proprie della logica di Boole. Naturalmente se si decide di risolvere P_{11} e P_{12} bisognerà considerare prima P_{11} e poi P_{12}, perché P_{11} precede P_{12} e cioè alcuni dati relativi a quest'ultimo problema non sono disponibili a priori ma sono il risultato della soluzione del primo, e lo stesso discorso vale per P_{313} rispetto a P_{312}.

Queste considerazioni sono utili anche se il problema originale P è risolvibile in modo diretto, per valutare quale sia la via che conviene battere, ovvero la più conveniente (per esempio dal punto di vista computazionale).

Attraverso i grafi AND-OR inoltre si può decidere per

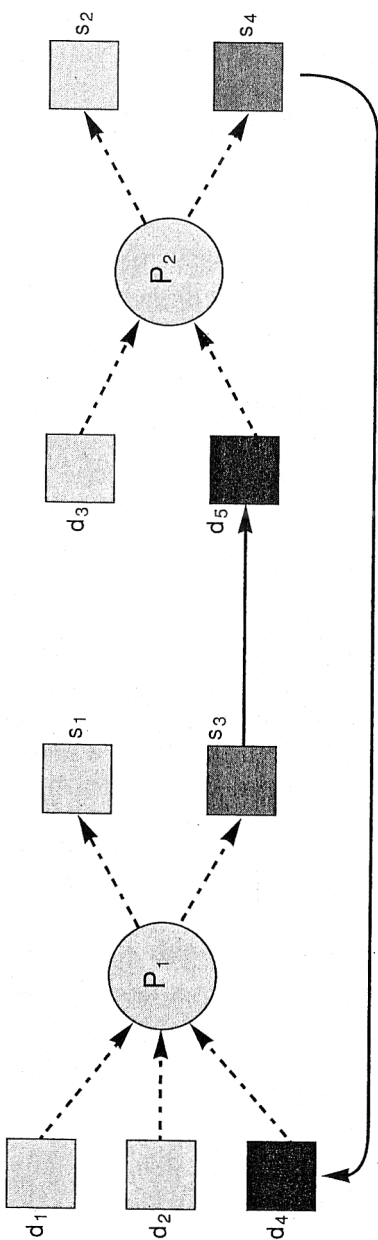



Fig. 3.10 Il dato mancante del primo problema (s_4) coincide con una soluzione del secondo problema (s_4), il quale a sua volta, per essere risolto, abbisogna di una delle soluzioni del primo problema (s_3). I due problemi si precedono a vicenda.

esempio se un problema P è a priori risolvibile. Un problema è risolvibile infatti se possiede un insieme equivalente o dominante di sottoproblemi certamente risolvibili, mentre non è risolvibile quando esiste almeno un problema equivalente a quello assegnato, o dominato da esso, del quale si sappia che non è risolvibile.

Nel caso della figura 3.8, il grafo AND-OR è *aciclico*, cioè senza percorsi che si richiudono su sè stessi in modo da formare anelli. Non tutte le situazioni però sono di questo tipo. Si possono per esempio avere dei casi in cui due problemi P_1 e P_2 si trovano in una relazione tale per cui P_1 precede P_2 e P_2 precede a sua volta P_1, come è mostrato nella figura 3.7d; sono ovviamente possibili anche anelli che coinvolgono un maggior numero di problemi e che abbiano forme più complicate.

Per dare un'idea più chiara di situazioni di questo tipo, ricorriamo a un esempio, nel quale rappresentiamo, accanto ai problemi, anche i dati d_1, d_2 e d_3 e le soluzioni s_1, s_2 e s_3 come nella figura 3.9. Supponiamo che questa corrisponda alla formulazione «naturale» del problema P, che non si sia riusciti a risolverlo direttamente (cioè a passare direttamente dai d_i alle s_i) e che lo si sia quindi riformulato come nella figura 3.10. In questa riformulazione il sottoproblema P_1, a partire da due dati di P (d_1 e d_2) e da un terzo dato (a priori non disponibile, d_4) consente di trovare la soluzione s_1. Il sottoproblema P_2, a partire dal terzo dato originale d_3 e da un nuovo dato d_5, consente di trovare la soluzione s_2. Il dato d_4 del problema P_1 costituisce la soluzione s_4 del problema P_2 (non prevista in rapporto al problema originale P) e, analogamente, il dato mancante per il secondo sottoproblema, d_5, costituisce la soluzione s_3 del primo sottoproblema.

Si ha dunque la situazione prevista dallo schema di figura 3.7d in cui P_1 precede P_2 (perché per risolvere P_2 bisogna disporre di d_5, e quindi aver già risolto P_1), ma nello stesso tempo P_2 precede P_1 (perché d_4, che è un dato di P_1, coincide con la soluzione s_4 di P_2).

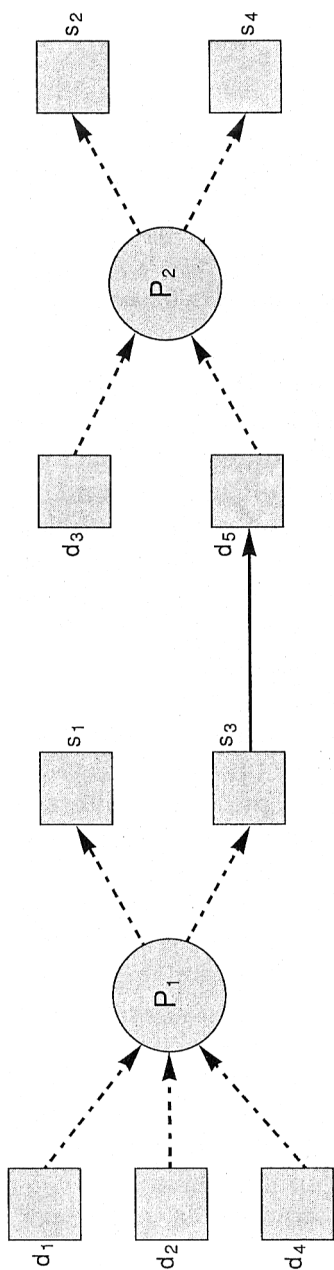



Fig. 3.11 Tagliando il secondo collegamento tra i problemi della figura precedente si può giungere alla soluzione per approssimazioni successive.

Di fronte a questo schema a retroazione si potrebbe temere di essere in una posizione di stallo. Per aggirarla si attribuisce al problema una sua dinamica, cioè si ricorre a un procedimento iterativo. Nel caso più semplice questo consiste nel «tagliare» l'uno o l'altro dei collegamenti fra i due sottoproblemi e quindi trattare più volte, per esempio, il problema come schematizzato in figura 3.11. Allo scopo si attribuisce a d_4 un valore di primo tentativo e si calcola su questa base il valore di s_4; poi si attribuisce a d_4 il valore ottenuto per s_4 e così via fino a quando (se il procedimento è convergente) si ottiene uno scostamento sufficientemente piccolo fra l'ultimo valore attribuito a d_4 e il valore calcolato per s_4 in corrispondenza a esso.

Non si tratta, ovviamente, del solo modo di superare le difficoltà poste dagli schemi a retroazione che si incontrano in sede di analisi dei problemi; un'altra strategia molto interessante che si può usare a questo scopo è quella basata sulla *teoria del coordinamento.* Questa si basa su metodi iterativi che procedono secondo schemi tipici, legati di volta in volta alla decomposizione adottata per il problema in esame, e organizzati a più livelli. Su questi, comunque, non sembra qui il caso di entrare in dettaglio.

3.1 I calcolatori analogici

Una curiosità terminologica
L'aggettivo «analogico» è stato impiegato, nel campo dei modelli fisici, per indicare quelli basati, appunto, sull'analogia. Questi sono quei modelli in cui le grandezze, adottando convenienti unità di misura, assumono gli stessi valori delle grandezze da rappresentare, ma sono di natura fisica diversa da quella di queste ultime. È il caso, per esempio, in cui il sistema originale è un sistema idraulico e il modello un circuito elettrico; i potenziali dei nodi e le correnti dei rami rappresentano l'andamento nel tempo di livelli e portate.
In un secondo momento si sono distinti i *modelli analogici* veri e propri, che presentano la stessa struttura del sistema originale, caratteristica che garantisce loro la coincidenza di comportamento, dai *calcolatori analogici,* circuiti concepiti più per risolvere le equazioni del sistema originale che per ripeterne la struttura.
Sia nei modelli analogici sia nei calcolatori analogici il risultato del problema è rappresentato dalla misura di una grandezza fisica suscettibile di variare con continuità, ovvero, in termini formali, capace di assumere qualsiasi valore in un intervallo di numeri reali.
Questa caratteristica, che accomuna i calcolatori analogici ai modelli, li distingue dai *calcolatori digitali,* in cui i numeri sono rappresentati mediante sequenze di cifre (in inglese *digit*) in corrispondenza biunivoca con i numeri interi anziché con tutti i numeri reali.
La contrapposizione analogico-digitale è stata poi estesa al campo dei segnali, indipendentemente dal fatto che essi vengano elaborati in un calcolatore o trasmessi e interpretati in un sistema di comunicazioni o, comunque, sottoposti a manipolazioni a proposito delle quali potrebbe essere improprio parlare di calcolo, almeno in senso stretto.
È così avvenuto che, ormai da parecchio tempo, il termine analogico abbia perduto il collegamento iniziale con l'analogia (come era, tipicamente, nei modelli fisici) e venga usato essenzialmente per specificare la natura dei segnali.
In pratica i numeri che i segnali analogici rappresentano, istante per istante, sono legati alla misura della grandezza fisica che costituisce il segnale, mentre, nel caso digitale, sono legati alla sequenza di simboli associati al segnale stesso.

Quindi, quando si parla di calcolatori analogici non si pensa, in genere, a dispositivi destinati a funzionare come modelli di un sistema originale, ma a vere e proprie macchine da calcolo, Il caso più comune è quello delle macchine capaci di risolvere equazioni differenziali, dette anche *analizzatori differenziali*, capaci di generare grandezze fisiche, generalmente tensioni elettriche, la cui misura in un dato istante corrisponda al valore della funzione che costituisce la soluzione dell'equazione differenziale in corrispondenza al valore della variabile indipendente nel medesimo istante.

Gli amplificatori operazionali
Un amplificatore può essere considerato come un quadripolo attivo, cioè un circuito, alimentato da una propria sorgente di potenza, con due morsetti di ingresso e due di uscita (fig. 1). Si parlerà, in particolare, di amplificatore di tensione se la differenza di potenziale V_u che si stabilisce

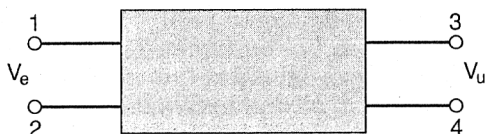



Fig. 1 Un amplificatore è rappresentato schematicamente come un circuito con due morsetti di ingresso e due di uscita.

fra i morsetti 3 e 4, dipende dalla differenza di potenziale V_e applicata fra i morsetti 1 e 2 (ed è maggiore di essa). In caso di funzionamento lineare, in un amplificatore di tensione, si ha:

$$V_u = k\,V_e$$

dove k è una costante che può essere positiva o negativa ma è in modulo maggiore di 1. Un *amplificatore operazionale* è caratterizzato da:
1) un valore negativo di k in modulo molto elevato;
2) un valore molto elevato dell'impedenza di ingresso;
3) un valore molto basso dell'impedenza di uscita;

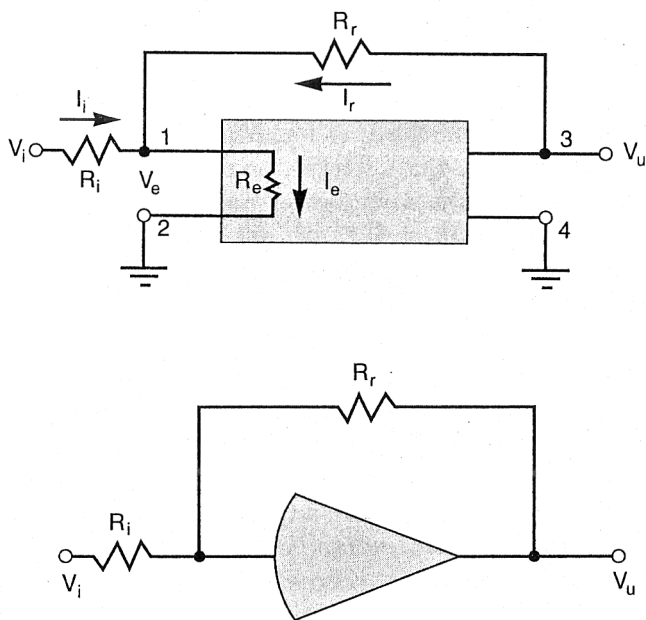



*Fig. 2 Amplificatore operazionale. L'amplificatore può essere rappresentato come un quadripolo (*sopra*), mettendo in evidenza l'impedenza di ingresso (data dalla resistenza interna* R_e*), oppure, convenzionalmente, come un settore circolare (*sotto*).*

4) uno schema a retroazione del tipo rappresentato nella figura 2.
Nella figura 2 è riportato, accanto allo schema con il quadripolo (di cui è messa in evidenza l'impedenza di ingresso R_e, supposta resistiva), anche lo schema convenzionale, in cui l'amplificatore è rappresentato da un settore circolare. Le equazioni del circuito di figura 2 per il funzionamento in corrente continua sono le equazioni delle resistenze:

$$I_i = \frac{V_i - V_e}{R_i}; \quad I_r = \frac{V_u - V_e}{R_r}; \quad I_e = \frac{V_e}{R_e}$$

l'equazione del nodo 1: $I_e = I_1 + I_r$
e l'equazione dell'amplificatore: $V_u = k\ V_e$

Sostituendo V_u/k a V_e nelle equazioni delle resistenze e sostituendo le correnti nell'equazione del nodo 1 si ha:

$$\frac{V_i}{R_i} = -\frac{V_u}{R_r} + \left(\frac{V_u}{kR_i} + \frac{V_u}{kR_r} + \frac{V_u}{kR_e} \right)$$

Osserviamo che i termini che figurano all'interno della parentesi al secondo membro dell'equazione possono essere considerati trascurabili rispetto al primo addendo dello stesso membro. Nei tre termini in parentesi compare infatti al denominatore la costante k, che, per ipotesi, ha un valore molto elevato. Nel terzo figura a denominatore anche la resistenza R_e, anch'essa di valore molto elevato per assunto. Trascurando questi termini si ha così:

$$\frac{V_i}{R_i} = -\frac{V_u}{R_r}$$

da cui si può ricavare le tensione in uscita, data da:

$$V_u = -\frac{R_r}{R_i} V_i$$

È interessante osservare che secondo questa relazione la tensione di uscita V_u è proporzionale a quella di ingresso V_i per un effetto di retroazione. Infatti se V_e, attraverso l'amplificatore, forza V_u ad assumere il valore $k\ V_e$, a sua volta V_u influenza V_e, che è il potenziale del nodo centrale 1 della stella di resistenze formata da R_i, R_e e R_r. Tale stella ha un estremo al potenziale di terra (quello corrispondente al nodo 2) e gli altri due estremi ai potenziali V_i e V_u rispettivamente.
Consideriamo ora il circuito della figura 3. Con analogo procedimento, si può dimostrare che per questo circuito vale la legge:

$$V_u(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_i(\tau)\, d\tau + C$$

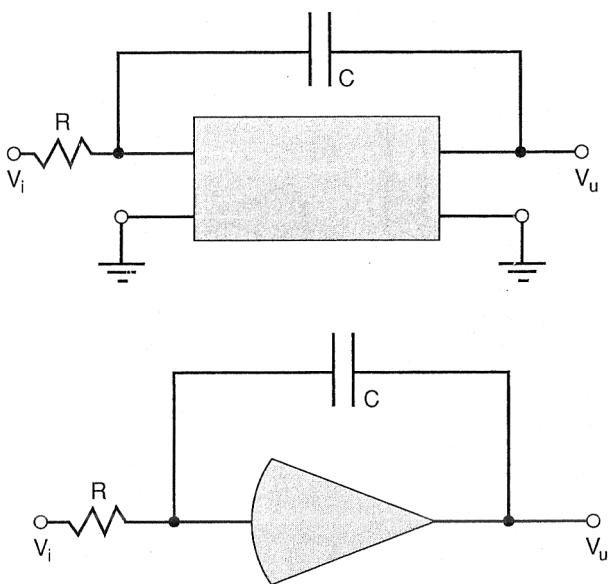



Fig. 3 Amplificatore operazionale in cui la tensione in uscita è proporzionale all'integrale nel tempo della tensione di ingresso (con costante di proporzionalità negativa).

ovvero che V_u è proporzionale all'integrale nel tempo di V_i con una costante di proporzionalità negativa.
Si possono avere anche amplificatori operazionali con più ingressi, come quelli schematizzati nella figura 4, dove si riportano anche le relative equazioni. Il primo di questi due schemi è detto *combinatore*, ed è spesso rappresentato in forma più semplice come nella figura 5, mentre il secondo è un *integratore*, il cui schema semplificato è rappresentato nella figura 6.

Gli analizzatori differenziali

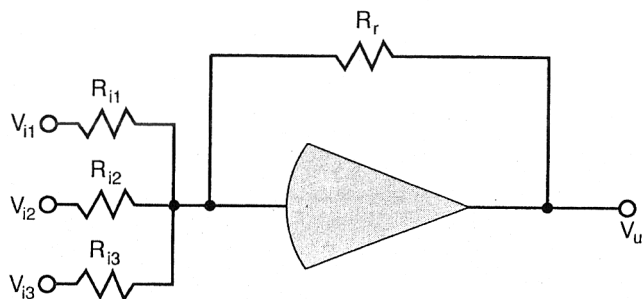
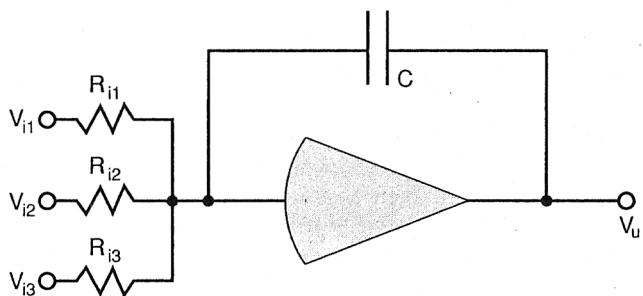
Un calcolatore analogico, nella sua versione più semplice, può essere considerato come una scatola di montaggio che contenga amplificatori operazionali, resistenze, condensatori e potenziometri (partitori di tensione, che danno in uscita una tensione uguale a quella di ingresso moltiplicata per un coefficiente compreso tra 0 e 1, vedi figura

$$V_u = -\frac{R_i}{R_{i1}} V_{i1} - \frac{R_r}{R_{i2}} V_{i2} - \frac{R_r}{R_{i3}} V_{i3}$$

$$V_u = -\frac{1}{R_{i1}C}\int_0^t V_{i1}(\tau)\, d\tau - \frac{1}{R_{i2}C}\int_0^t V_{i2}(\tau)\, d\tau - \frac{1}{R_{i3}C}\int_0^t V_{i3}(\tau)\, d\tau + \text{cost}$$

*Fig. 4 Combinatore (*sopra*) e integratore (*sotto*) con le equazioni che, nei due casi, collegano la tensione di uscita alle tensioni di ingresso.*

7) da combinare insieme in modo da formare un circuito capace di risolvere un'equazione differenziale ordinaria. In questo caso risolvere significa far assumere alla tensio-

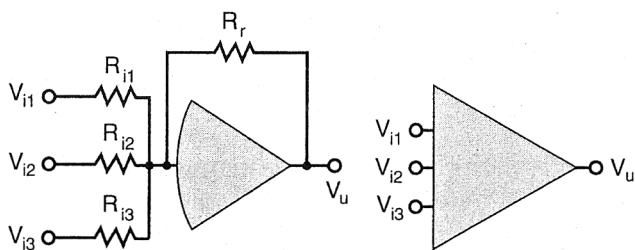



Fig. 5 Rappresentazione circuitale e convenzionale di un combinatore.

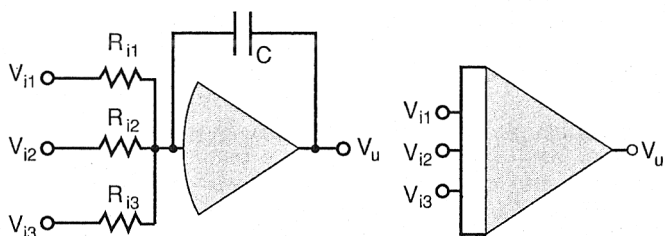



Fig. 6 Rappresentazione circuitale e convenzionale di un integratore.

ne di un nodo l'andamento nel tempo corrispondente alla funzione che costituisce l'integrale particolare della equazione differenziale, relativo alle condizioni iniziali imposte.
Per illustrare il principio di funzionamento di queste macchine si ricorrerà a un esempio. Si consideri l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine:

$$\frac{d^2y}{d\,t^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

dove $y(t)$ è la funzione incognita, $f(t)$ è una funzione di forzamento assegnata (identicamente nulla se l'equazione è

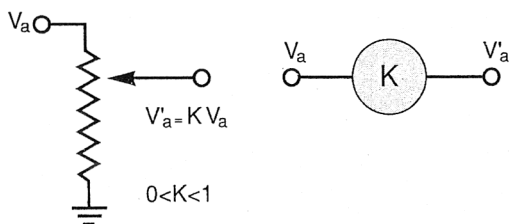



Fig. 7 Rappresentazione circuitale e convenzionale di un potenziometro.

omogenea) e a_1 e a_0 sono coefficienti costanti. L'equazione può essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{d^2y}{d\,t^2} = f(t) - a_1 \frac{dy}{dt} - a_0 y$$

Scritta in questa forma l'equazione ci suggerisce di ricorrere al circuito di figura 8 dal quale si ottiene la d^2y/dt^2, una volta note $f(t)$, dy/dt e y. Ovviamente $f(t)$ deve essere

Fig. 8 Circuito base per la soluzione di un'equazione differenziale. In questo modo si ricava la derivata seconda della funzione incognita, dalla quale, per successive integrazioni, è possibile risalire alla funzione stessa.

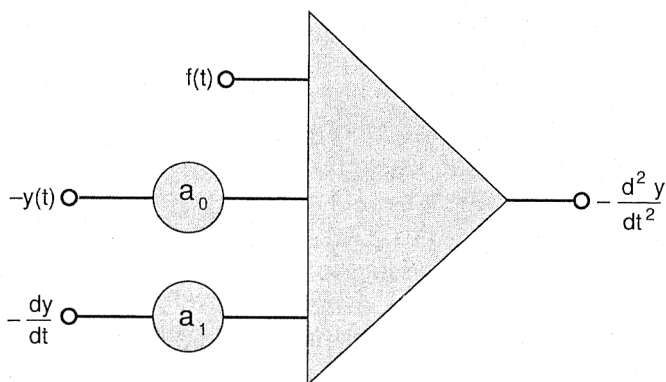
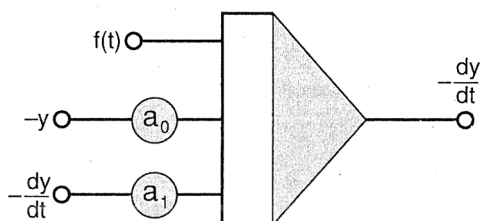
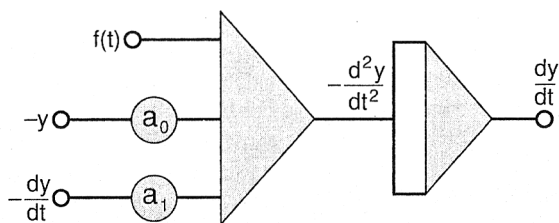
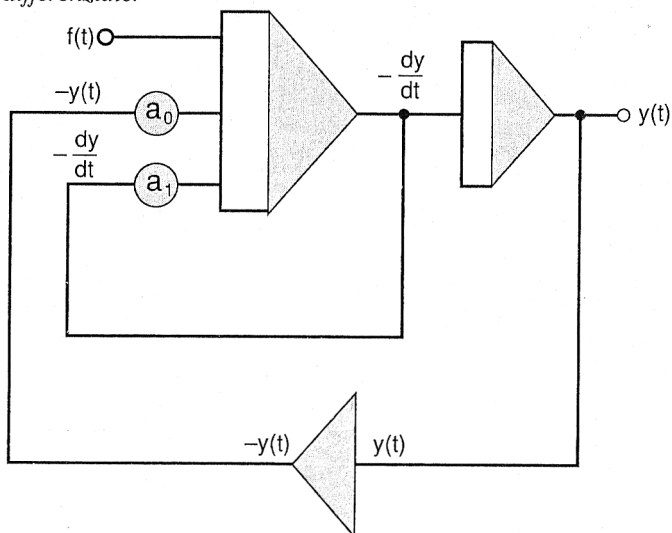



*Fig. 9 Determinazione della derivata prima di una funzione incognita a partire dal circuito rappresentato nella figura precedente (*sopra*), e con l'uso di un solo integratore (*sotto*).*

Fig. 10 Circuito a retroazione per la risoluzione di un'equazione differenziale.

assegnata; per ricavare dy/dt basterà integrare d^2y/dt^2 e quindi usare uno schema del tipo descritto nella figura 9. Infine per ricavare $y(t)$ sarà sufficiente integrare dy/dt.
Tenendo conto dei cambiamenti di segno introdotti da ciascun operatore lo schema complessivo per risolvere l'equazione assegnata è quello della figura 10.
Si può dire quindi che per i calcolatori analogici la retroazione gioca un ruolo determinante, poiché non solo essi si servono di elementi di base che debbono le loro caratteristiche funzionali al fatto di essere circuiti a retroazione, ma li collegano tra loro in schemi a retroazioni multiple.
Sebbene oggi i calcolatori analogici siano assai meno usati che negli anni Cinquanta e Sessanta, schemi come quelli di figura 10 rivestono ancora un notevole interesse nel campo dei calcolatori digitali, in rapporto all'impiego dei linguaggi di simulazione di sistemi continui, e gli amplificatori operazionali continuano a trovare largo impiego in molte applicazioni dell'elettronica.

4. I modelli

4.1 *Ambiguità di un termine*

Modus, modulus, modellus è la successione dei termini che hanno portato dal latino *modus*, misura, all'italiano modello, parola di impiego piuttosto diffuso e di fortuna variabile. In alcuni casi, infatti, il modello viene assurto a esemplare ideale e perfetto, chiarificatore della realtà che descrive, mentre in altri viene preso come una schematizzazione sommaria e imperfetta. Alle volte una teoria basata su modelli formali rappresenta anche qualche cosa di più ricco e completo (per esempio nella logica matematica i modelli di teorie formali in genere sono semanticamente più ricchi delle singole teorie modellizzate) ma altre volte non è che uno strumento approssimativo di riproduzione di un oggetto da studiare, come per esempio nei modelli utilizzati in ingegneria che riproducono solo gli aspetti essenziali di fenomeni complessi.

Variabile è anche l'atteggiamento nei riguardi dell'utilità dei modelli. Per quanto riguarda i modelli matematici, per esempio, vi sono atteggiamenti contrapposti, gli uni di fiducia quasi acritica, basata anche su convinzioni metafisiche nei loro confronti (Galileo diceva che il libro dell'universo è scritto in linguaggio matematico), e gli altri più o meno consapevolmente pragmatistici. Questi ultimi giustificati per esempio dall'approccio al problema adottato nella progettazione ingegneristica, dove spesso le schematizzazioni non sono riconducibili a leggi fisiche precise, ma ne costituiscono delle semplificazioni (dal punto di vi-

sta concettuale a volte anche arbitrarie), ma ciò non toglie nulla alla loro validità pratica in ambiti ben circoscritti.

Oggi il massiccio ricorso agli elaboratori elettronici ha fatto sì che i modelli matematici abbiano assunto un rilievo sempre maggiore nella ricerca e ciò, se può aver contribuito a superare antichi contrasti, ha evidenziato tuttavia nuovi problemi. L'uso degli elaboratori permette di affrontare, con metodi sofisticati e in tempi ragionevolmente contenuti, problemi così complessi che la loro trattazione analitica pochi anni fa avrebbe posto difficoltà proibitive sia di vero e proprio calcolo numerico, sia di individuazione delle ipotesi di base, di impostazione corretta delle equazioni relative al fenomeno da esaminare.

Con l'aumento delle potenzialità di calcolo si ha la possibilità di affrontare problemi sempre più complessi e, così, la scelta della natura e della struttura del modello matematico è diventata sempre più delicata.

Sono state recuperate anche posizioni filosofiche dei primi decenni del Novecento, di tipo convenzionalistico (Pierre Duhem e Henri Poincaré), in difesa di modelli in grado di rendere efficacemente conto del comportamento dei sistemi studiati più che di corrispondere a leggi fisiche generali. Il convenzionalismo, infatti, riteneva che il problema della scelta fra teorie diverse non avrebbe dovuto essere posto in termini di verità ma bensì di efficacia e, nel caso dei modelli, questo atteggiamento oggi è largamente condiviso. Il modello migliore è quello più efficace in rapporto ai fini particolari per i quali viene formulato.

4.2 *Modelli fisici e modelli matematici*

I modelli possono essere classificati in base a criteri diversi ma, in ogni caso, le schematizzazioni sono essenzialmente operative. Un criterio classico è quello che li distingue in modelli fisici e modelli matematici.

I primi sono di gran lunga i più antichi e possono a loro

volta essere divisi in tre categorie: i modelli basati sulla *corrispondenza iconica*, sulla *similitudine* e sull'*analogia*.

I modelli a corrispondenza iconica sono rappresentazioni in scala ridotta della realtà (quelli che spesso si chiamano modellini). Essi risultano particolarmente efficaci per rappresentare oggetti tridimensionali di struttura complicata, specialmente quando ci si rivolge a chi non ha dimestichezza con la simbologia del disegno tecnico.

Il modello in scala di un edificio non avrebbe però significato se fosse sottoposto a prove di carico o di resistenza. Lo stesso discorso vale per i modelli da utilizzare in vasche navali e gallerie aerodinamiche. In questi casi è la teoria della similitudine meccanica che suggerisce costruzioni che conservino gli equilibri statici e dinamici presenti nella realtà; può essere necessaria per esempio l'adozione di materiali diversi, o di una scala dei tempi non unitaria (per la quale i fenomeni che si corrispondono nel sistema originale e nel modello richiedono tempi diversi per la loro evoluzione) o anche di scale diverse per le tre dimensioni spaziali, come nei cosiddetti modelli distorti. La teoria della similitudine insegna a compiere correttamente le variazioni di scala in modo che ciò che avviene nel modello corrisponda a ciò che avviene nella realtà: per esempio che, nel caso di modelli idraulici, si passi dal regime laminare al regime vorticoso nelle stesse circostanze, o che le onde di piena siano della stessa forma e così via.

Nei modelli basati sull'analogia, cui abbiamo già accennato nella scheda 3.1, la corrispondenza tra le grandezze in gioco non è di natura fisica ma di natura matematica, ovvero esse sono descritte dalle stesse equazioni, e quindi evolvono nel tempo o si distribuiscono nello spazio secondo le stesse leggi.

Nel secolo scorso era abbastanza diffuso usare modelli meccanici o, più ancora, modelli idraulici, per rappresentare fenomeni elettrici. Un circuito elettrico era concepito come un condotto idraulico e il generatore che lo alimentava come una pompa; alle differenze di potenziale si face-

vano corrispondere salti di pressione, alle intensità di corrente elettrica portate liquide nei rami del condotto, alla carica elettrica accumulata in un condensatore il volume di liquido accumulato in un serbatoio inserito nel condotto, e così via. In questo caso però si trattava ancora di modelli interpretativi (o esplicativi), e di un uso didattico dell'analogia. In seguito l'analogia tra sistemi elettrici e sistemi meccanici (o idraulici) è stata utilizzata in senso inverso, per esempio per costruire circuiti elettrici (i modelli) in cui gli andamenti nel tempo delle correnti di taluni rami (o i potenziali di taluni nodi) fossero identici agli andamenti delle velocità di parti di un dispositivo meccanico (il sistema originale). Lo scopo del modello, in questo caso, è la simulazione, e il ricorso all'analogia facilita la misura delle grandezze, la costruzione del modello e la modifica dei suoi parametri.

Per riassumere possiamo dire che più anticamente venivano utilizzati i modelli in scala, che assicuravano soltanto la corrispondenza iconica, poi nacquero i modelli basati sulla similitudine, che sacrificavano in parte la corrispondenza delle forme per ottenere una migliore corrispondenza di comportamenti, e infine i modelli basati sull'analogia, nei quali la corrispondenza di forma spesso sparisce del tutto. Ultimamente, abbandonati i modelli fisici, si ha la tendenza a preferire i modelli matematici, ridotti a sistemi di equazioni, da risolvere con l'aiuto di elaboratori digitali, possibilmente ricorrendo ad appositi linguaggi di simulazione. Il passaggio dagli oggetti veri e propri alle loro pure rappresentazioni formali dimostra la tendenza a muoversi verso un livello di astrattezza sempre più spinto.

4.3 *La mediazione fra realtà e teoria*

La rappresentazione in termini di equazioni matematiche dei fenomeni fisici è un fatto consueto ma non è lo

stesso per le altre scienze della natura, quelle chimiche o quelle biologiche per esempio, anche se l'interesse per i modelli matematici, che tendono a dare ai problemi una impostazione di tipo formalizzato, si va diffondendo sempre più. Nelle scienze umane e sociali la situazione è, per alcuni versi, differente: la parola modello viene impiegata con un'estensione più ampia e assume il significato di teoria. Dare un modello di un certo fenomeno sociale o fare una teoria su di esso sono infatti espressioni che vengono spesso usate in modo intercambiabile. Qualcosa di analogo si verifica anche in certi campi della fisica applicata e dell'ingegneria. Diversi problemi di meccanica possono essere studiati ricorrendo a schematizzazioni differenti, che fanno riferimento a sistemi di punti materiali, a corpi rigidi o a corpi elastici: nell'ultimo caso per esempio dire che si adotta il modello dei corpi elastici o che si fa uso della teoria dell'elasticità è, sostanzialmente, la stessa cosa.

Come si vede, il rapporto modello-teoria spesso nasconde una ambiguità: nei casi citati i due termini appaiono come sinonimi, mentre in qualche altro caso essi vengono considerati antitetici. Talvolta il modello è concepito come un ausilio valido alla comprensione del fenomeno almeno sul piano psicologico (se non su quello conoscitivo), mentre altre volte come una fonte di equivoci, da abbandonare appena si sia formulata una teoria rigorosa e soddisfacente, anche se può essere stato utile per favorire la scoperta.

L'atteggiamento critico nei riguardi dei modelli ha avuto uno dei suoi antesignani in Pierre Duhem, che polemizzava contro l'uso di analogie meccaniche per la descrizione di fenomeni elettromagnetici (bisogna dire che allora le similitudini erano spesso ingenue e grossolane). Della sua opinione erano anche scienziati illustri, quali Wilhelm Ostwald, Gustav Robert Kirchhoff ed Ernst Mach, ma altri fisici importanti, quali lord Kelvin e Ludwig Boltzmann, favorevoli all'uso dei modelli, erano convinti che questi fossero validi anche sul piano conoscitivo.

Un modo brillante di vedere la posizione dei modelli nei loro rapporti con la realtà e con la teoria è stato suggerito dal matematico René Thom, cui si deve la teoria delle catastrofi. Thom ritiene che tra realtà e modello vi sia un rapporto di analogia, dove il termine analogia assume qui un significato più generico di quello specialistico visto in precedenza parlando dei modelli fisici, un significato che allude alla corrispondenza che si deve ammettere fra certi aspetti della realtà e certi aspetti del modello. L'analogia tra realtà e modello, illustrata nella figura 4.1, parte dalla formulazione dei quesiti sulla realtà su cui vogliamo indagare e dal trasferimento di tali quesiti in problemi relativi al comportamento del modello. Utilizzando il modello, cioè compiendo l'esperimento se si tratta di un modello fisico, o risolvendo le equazioni che lo descrivono se si tratta di un modello matematico, si determina la risposta ai quesiti posti. A questo punto tramite l'analogia, ma in senso inverso, si trasferiscono le risposte trovate in risposte relative alla realtà.

In generale un modello non è identico alla realtà, ma presenta gli stessi aspetti e gli stessi comportamenti solo in certi ambiti ben definiti: quelli in base ai quali il modello è stato progettato e costruito. In questo caso si parla di *analogie positive* ed è solo all'interno di queste che la procedura di tradurre quesiti e risposte dall'ambito della realtà a quello del modello e viceversa non pone problemi.

Analogie negative sono invece quelle per le quali non si ha corrispondenza tra modello e realtà, per esempio quelle relative alla natura fisica delle grandezze in gioco nel caso del modello elettrico di un sistema meccanico, sedi di fenomeni in cui sono in gioco grandezze di natura fisica diversa, e sarebbe ovviamente assurdo dedurre la natura fisica delle une da quella delle altre. Le analogie negative non informano direttamente sulla realtà ma, attraverso il loro impiego, il modello risulta più semplice da costruire, comodo da usare e poco costoso.

Non in tutti i casi nella costruzione di un modello si può

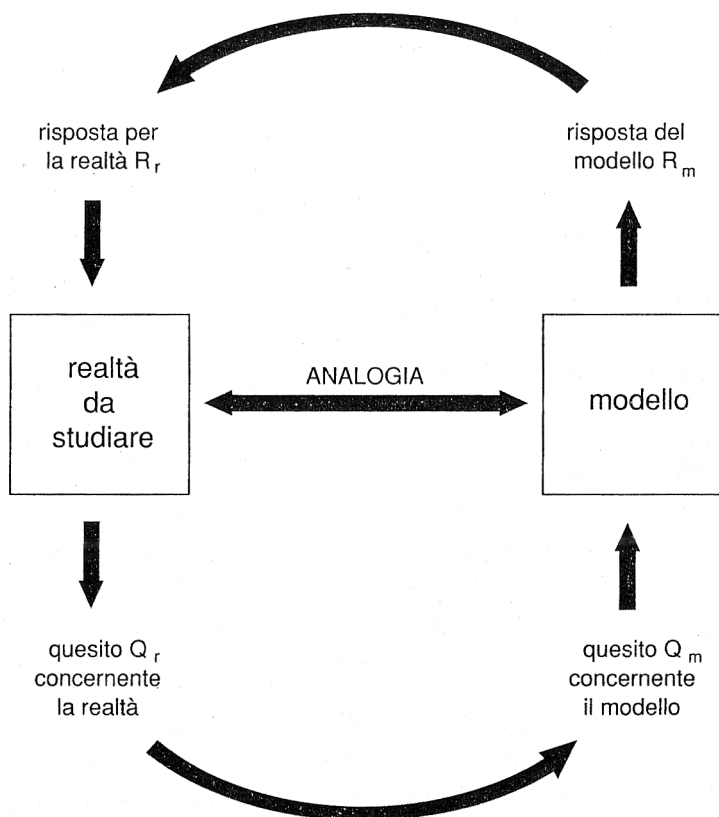



Fig. 4.1 Analogia tra modello e realtà. Partendo da quesiti specifici sulla realtà, li si trasforma in problemi per il modello; le soluzioni di questi corrispondono alle risposte ai quesiti. Il rapporto di analogia è bidirezionale.

dire a priori se ci si trova di fronte a un'analogia positiva o a un'analogia negativa. In molti casi si ha a che fare con *analogie neutre*, o meglio con analogie che a priori appaiono tali. Il problema relativo alla natura di alcune di queste analogie neutre può risultare non banale; si tratta, approfondendo l'indagine, di stabilire se siano analogie positive o negative. Nel caso in cui le analogie neutre si rivelino positive il risultato può essere interessante, poiché non sono

quelle note a priori (in base alle quali è stato costruito il modello), ma forniscono un nuovo contributo alla conoscenza della realtà.

Sia che le caratteristiche del modello vengano adottate casualmente, sia che siano scelte in modo consapevole, lo scopo è quello di ottenere in modo più facile e più economico il risultato voluto. L'uso del modello porta poi a riflettere sulle sue proprietà specifiche e a indagare se queste sono corrispondenti alle proprietà del sistema originale. In qualche caso il risultato può anche essere di notevole valore: se della realtà che si considera è noto per esempio solo il comportamento esteriore e riproducendolo nel modello si utilizza un determinato meccanismo con una determinata struttura interna, si può formulare l'ipotesi che anche il sistema originale presenti una struttura dello stesso tipo e si possono concepire esperimenti idonei a falsificare o a corroborare questa ipotesi.

In definitiva si può concludere che un modello serve prima di tutto per fornire, utilizzando le analogie positive, una soluzione a un quesito che ci si sia posti sulla realtà e che si sia tradotto, sempre in base a quell'analogia, in un quesito relativo al modello. Può servire anche per suggerire delle ipotesi, nel caso che si ritenga che analogie neutre siano positive.

Il modello potrà invece essere fonte di equivoci e di errori se, acriticamente, si darà per scontato che le analogie neutre siano analogie positive mentre un'analisi più accurata potrebbe portare a concludere che si tratta di analogie negative e che quindi è scorretto attribuire al sistema originale le corrispondenti proprietà del modello.

Veniamo ora più precisamente al legame fra modello e teoria. Attribuendo a questi due termini il significato suggerito dal buon senso si può dire che la teoria è qualche cosa di più generale mentre il modello qualche cosa di più particolare. Il rapporto tra teoria e modello, quindi, è un rapporto a un solo senso, un rapporto di *immersione*, e non un rapporto bidirezionale come l'analogia. La sche-

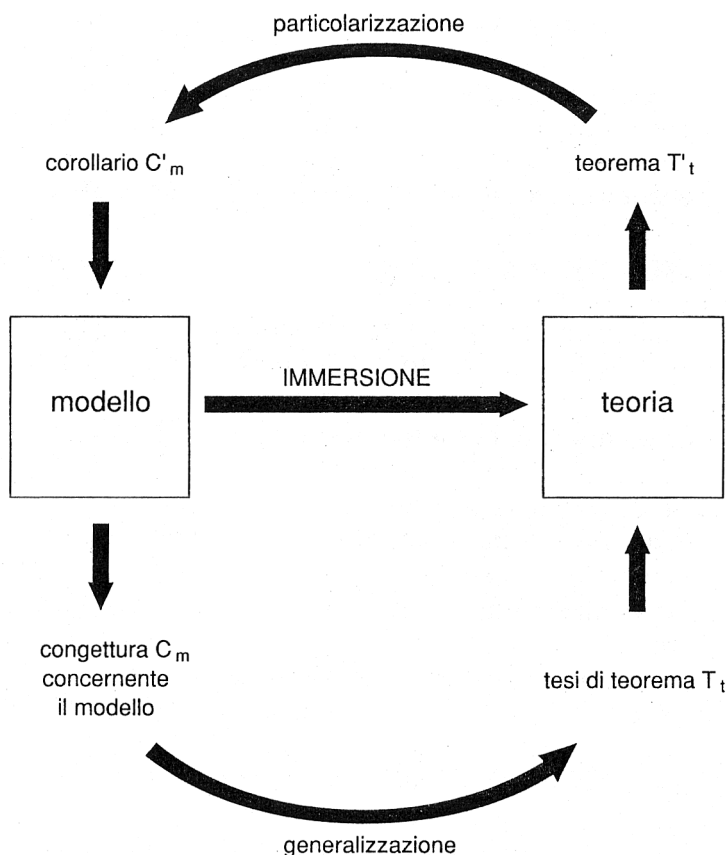



Fig. 4.2 Rapporto tra modello e teoria. Nel passaggio dal modello alla teoria si ha una generalizzazione, mentre in quello dalla teoria al modello si ha una particolarizzazione: il rapporto è unidirezionale.

matizzazione di questo rapporto è suggerita dalla figura 4.2.

Una congettura relativa a un modello può essere generalizzata nella tesi di un teorema, che la teoria ci consente di dimostrare rigorosamente. Il teorema potrà poi essere particolarizzato in un corollario che riguarda più specificamente il modello, e che potrà essere utilizzato per determinare le risposte ai quesiti formulati nel modello stesso.

Mettendo insieme le due figure 4.1 e 4.2, che descrivono i legami tra realtà e modello e tra modello e teoria, si ottiene lo schema di figura 4.3, che collega tra loro i tre concetti di realtà, modello e teoria, e dove è evidente che il modello gioca un ruolo di mediazione tra realtà e teoria. Seguendo questo schema, se si guardano le cose dal punto di vista della realtà, il modello e la teoria coincidono, e questo giustifica l'uso delle due espressioni come sinonimi, mentre se si guardano le cose dal punto di vista della teoria, il modello appare un oggetto come un altro fra quelli della realtà cui si applica la teoria.

4.4 *Descrizione, interpretazione e predizione*

I modelli possono essere concepiti e progettati per motivi e scopi diversi poiché anche lo stesso problema può essere affrontato da punti di vista differenti, secondo l'obiettivo che ci si prefigge. In base a questo i modelli possono essere divisi in tre categorie: i modelli *descrittivi*, *interpretativi* e *predittivi*.

I modelli descrittivi hanno lo scopo di sintetizzare in un meccanismo o in un algoritmo i dati osservati relativamente a un fenomeno, ai fini di renderne più agevole la comprensione.

I modelli interpretativi cercano di spiegare il comportamento di un fenomeno e la sua evoluzione ricorrendo a leggi generali e ipotizzando strutture interne che giustifichino il comportamento esterno.

I modelli predittivi si propongono infine di prevedere l'andamento futuro di un fenomeno, almeno entro un dato orizzonte temporale.

La differenza di caratteristiche fra un modello descrittivo e uno predittivo risulta chiara facendo riferimento a un esempio classico della storia della scienza, quello relativo al moto dei pianeti del sistema solare.

L'astronomo danese Tycho Brahe, dopo averli osserva-

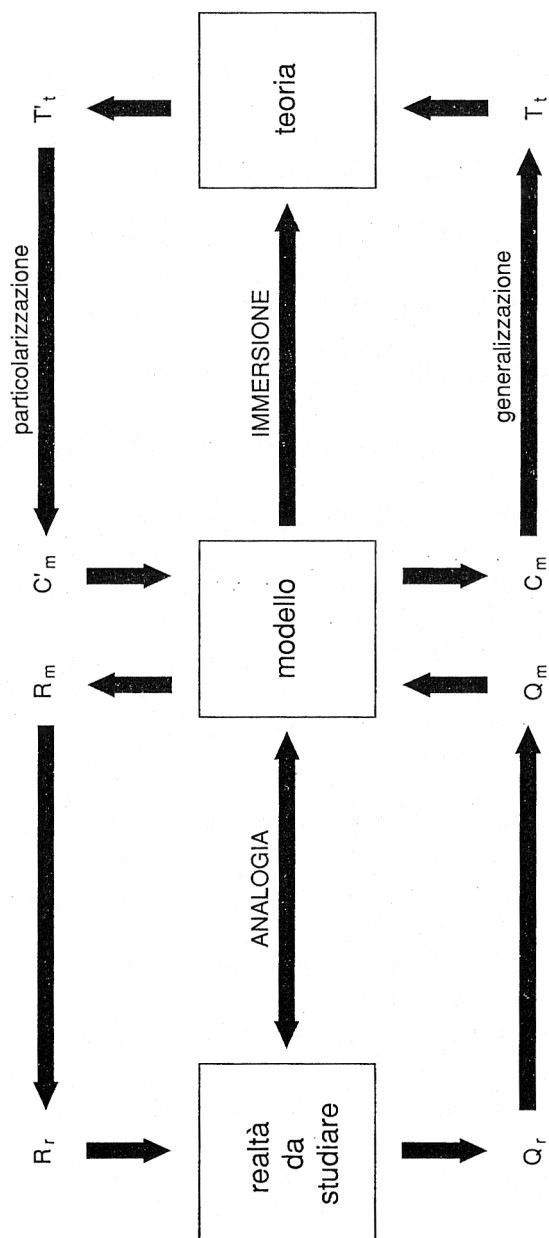



Fig. 4.3 Schema dei legami tra realtà, modello e teoria.

ti a lungo, aveva raccolto una gran messe di dati molto precisi sul moto dei pianeti (per quel che potevano consentire gli strumenti dell'epoca), e li aveva presentati nella forma tabellare di efemeridi. Non si trattava di un vero e proprio modello e parlarne in questo senso sarebbe una forzatura. È lecito invece parlare di modello del sistema solare nel caso di Johannes Kepler, che sintetizzò i dati di Tycho nelle sue tre famose leggi:

1) i pianeti descrivono orbite ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei fuochi;

2) le velocità areali sono costanti;

3) i quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite.

Il modello di Keplero è certamente un modello di tipo descrittivo, poiché compendia in pochi elementi sintetici i numerosi dati raccolti da Tycho Brahe. Non ci sembra di poterlo giudicare, invece, un modello interpretativo, nel senso che non dà alcuna spiegazione del fenomeno. Un modello interpretativo è invece quello fornito da Isaac Newton qualche tempo dopo, che riconduce il moto dei pianeti alle leggi generali della dinamica, e ne dà una spiegazione nell'ambito di questa. La traiettoria ellittica percorsa dai pianeti suggerita da Keplero, le loro velocità e i periodi di rivoluzione sono il risultato della forza di gravità esercitata dal Sole su ciascun pianeta, tenuto conto della sua velocità in un generico istante.

Entrambi i modelli invece possono essere considerati predittivi, ma lo sono in modo diverso. Il modello di Keplero consente la previsione del moto futuro dei pianeti fino ad allora noti, ma non è giustificato estenderlo anche ad altri. Quello di Newton consente invece di prevedere la traiettoria non solo di tutti i pianeti, ma anche di altri corpi celesti.

Da questo esempio si potrebbe pensare che un modello interpretativo sia più adatto di uno descrittivo per venire utilizzato come modello predittivo, ma in realtà questo non è sempre vero. Pensiamo per esempio alle maree, pre-

vedibili con notevole precisione senza che tuttavia si sappia abbastanza dei processi fisici implicati. Si ha a che fare, cioè, con un modello descrittivo che funziona molto bene anche per fare previsoni, ma che non può essere considerato un modello interpretativo.

4.5 *La pertinenza*

Quando si mette a punto un modello ci si scontra con un problema — quello della *pertinenza* — che riguarda la scelta (entro certi limiti arbitraria) di ciò di cui si deve tenere conto nel formulare il modello, in una parola di ciò che si considera *pertinente.*

Le analogie positive riguarderanno per esempio solo gli aspetti pertinenti. Degli altri aspetti non sarà necessario tenere conto e generalmente si sceglierà il modello più semplice e economico in grado di giustificare solo ciò che interessa.

A questo proposito può essere interessante ricordare un aneddoto della vita di Winston Churchill. L'ammiragliato inglese si vantava molto dei risultati ottenuti dai reparti che si occupavano di mimetizzazione, che avevano realizzato finte navi militari da tenere alla fonda insieme a quelle vere per ingannare i bombardieri nemici. Sembra che Churchill riuscì a distinguere a colpo d'occhio le navi vere da quelle finte basandosi, si seppe poi, semplicemente sull'osservazione dei gabbiani, che si affollavano solo intorno a quelle vere, in attesa di cibo. Naturalmente questo non implica che lo stratagemma non fosse utile, perché i bombardieri non avrebbero potuto basarsi sugli elementi olfattivi cui erano sensibili i gabbiani e nemmeno accorgersi dell'affollarsi di questi intorno a certe sagome. Dal punto di vista dell'esigenza di trarre in inganno i bombardieri i modelli costruiti andavano quindi benissimo.

Ancora in rapporto a questo problema si può ricordare la frase, spesso ripetuta fra coloro che si occupano di ana-

lisi delle attività neurocerebrali, secondo la quale il miglior modello del cervello è il cervello stesso (frase che può essere estesa a qualsiasi altro oggetto di studio). L'affermazione è valida se siamo interessati a tutti gli aspetti della struttura e del funzionamento del cervello, ma se non è così, e questa è la circostanza più comune, il miglior modello è quello più semplice, capace di riprodurre solo gli aspetti che ci interessano.

Il problema della pertinenza può essere richiamato a proposito delle riflessioni di Newton sulla gravitazione universale, suggerite dalla osservazione della caduta di una mela da un albero. Newton si chiese perché, se la mela cade sulla Terra, non dovrebbe cadere anche la Luna. Si rispose che tutti gli oggetti, in certo modo, cadono: la mela lungo la verticale, perché si stacca dall'albero con velocità iniziale nulla, una palla di cannone secondo una traiettoria parabolica, per la spinta iniziale, e la Luna secondo una traiettoria ellittica.

Newton supera così la tradizionale distinzione operata da Aristotele per cui le leggi di moto cui sono soggetti i corpi sono differenti secondo che i corpi appartengano al mondo sublunare o a quello dei cieli, e arriva invece alla conclusione che le une e le altre sono effetto di una stessa legge di grandiosa portata.

Che cosa sarebbe accaduto se si fosse trattato di una giornata ventosa e Newton avesse visto cadere, accanto alla mela, una foglia secca o la piuma di un uccello, e si fosse proposto di dare una descrizione unitaria di tutti questi fenomeni? Probabilmente, in questo caso, neppure il grande Newton sarebbe riuscito a risolvere il cumulo e l'intreccio di tanti problemi.

Quando una sintesi scientifica si è ormai affermata, sembra ovvia la scelta che ha portato a giudicare pertinenti certi aspetti alla teoria che si voleva fondare e non pertinenti certi altri. Per i fondatori di questa sintesi scientifica, però, non è così ovvio. La grandiosità dell'intuizione newtoniana non sta solo nell'avere considerato come lo stesso

fenomeno il moto rettilineo della mela e quello ellittico della Luna (nonostante la tradizione aristotelica li avesse attribuiti a due diverse sfere di fenomeni), ma anche quello di avere trattato separatamente il moto della mela, considerandolo non apprezzabilmente influenzato dalla resistenza del mezzo e dai movimenti dell'aria, da quello di una foglia secca, in cui questi elementi giocano in maniera prevalente rispetto alla gravità (nonostante la tradizione aristotelica li avesse attribuiti alla stessa sfera di fenomeni).

Con Galileo, Cartesio e Newton prevalse il metodo analitico: ogni fenomeno può essere influenzato da più fattori, ma si ottengono risultati validi solo considerandone separatamente gli effetti. È questo, per esempio, il senso degli esperimenti con la macchina pneumatica che mostravano che, nel vuoto, una piuma cade verticalmente come un pezzo di piombo e i due impiegano lo stesso tempo per compiere un uguale percorso. L'esperimento non deve essere necessariamente realistico, ma deve, secondo il punto di vista analitico, far vedere che cosa accade quando sono in gioco solo gli agenti che si considerano pertinenti a una certa teoria, e cioè, nel caso considerato, quando la resistenza del mezzo e il movimento dell'aria non soverchiano la gravità.

Il problema è di pertinenza e non di importanza pratica, e lo è nell'ambito di una determinata teoria. Nel caso della mela e in quello della piuma entrano in gioco sia la forza di gravità sia la resistenza del mezzo: la prima prevale nella caduta della mela, la seconda in quella della piuma. Talvolta prevale un fattore e talvolta un altro. In qualche caso, come nel moto dei proiettili, sono presenti con pesi paragonabili.

Queste considerazioni, valide in qualsiasi disciplina scientifica, valgono anche per i modelli.

Un modello è costruito per descrivere, interpretare o prevedere. Gli aspetti pertinenti allo scopo considerato devono essere tenuti in conto, mentre gli altri possono non

esserlo. In alcuni casi, se prendendoli in considerazione si incorre in inutili complicazioni e maggiori costi, è meglio che vengano tralasciati.

4.6 *L'uso dei modelli matematici nelle varie scienze*

I modelli matematici vengono impiegati nel modo più tipico in fisica. Ogni fenomeno vi viene descritto da leggi esplicite mediante opportune equazioni, i cui parametri hanno un preciso significato. Le grandezze fisiche sono suscettibili di misure, che devono avvenire secondo specifiche procedure. L'uso di modelli matematici è così ovvio che l'espressione non è neppure esplicitata, nella pratica, come avviene invece in quei campi in cui accanto ai modelli matematici si utilizzano modelli fisici (come nell'ingegneria) o in quelli in cui i modelli formalizzati in generale coesistono con altri tipi di descrizione più generici e qualitativi.

È una caratteristica intrinseca della fisica che la rende facilmente formalizzabile in termini matematici? Poiché nessuna scienza è nata, come Pallade dal capo di Zeus, già vestita e armata di tutto punto, una breve indagine storica può contribuire a trovare la risposta a questa domanda.

Tutte le discipline che oggi hanno una veste formalizzata hanno attraversato una fase preliminare, nella quale i problemi venivano trattati in termini generici e, spesso, con riferimento a esigenze di tipo pratico anziché di tipo conoscitivo.

La geometria è stata per secoli la sola disciplina a fornire un paradigma e un modello ideale per ogni campo di studio di carattere scientifico. Ma la sistematizzazione euclidea non può farci dimenticare le origini empiriche e operative di tale disciplina che nasce, storicamente, sulle rive del Nilo e dell'Eufrate con la formulazione e la generalizzazione di regole pratiche utili per ricostruire i confini dei campi dopo le benefiche alluvioni o per seguire il mo-

vimento degli astri. La stessa fisica è passata attraverso fasi di formulazione filosofica di teorie ben poco quantitative. Successivamente si sono imposte elaborazioni empiriche di leggi, a carattere quantitativo, ma formulate in termini verbali e non mediante formule. È solo molto più tardi che si è arrivati a una effettiva formalizzazione. La chimica, rispetto alla fisica, risente ancora del ritardo di due secoli che intercorre fra Galileo e Lavoisier. Anche in questo caso in una prima fase si è fatto uso di descrizioni verbali o di formalizzazioni parziali e solo in un momento successivo sono state adottate impostazioni rigorose e complete, con la prevalenza di una rappresentazione globale dei fenomeni di interesse in termini compiutamente matematicizzati. Un'impostazione di quest'ultimo tipo è ancora ben lontana dal compimento in biologia, o ancor più, in psicologia. In economia, invece, all'impostazione tradizionale che si serve di schemi concettuali illustrati a parole, si affianca già da tempo una formulazione basata su rigorose espressioni matematiche. In sociologia e in linguistica si va diffondendo da poco l'uso di modelli matematici elaborati e complessi. Ma in tutte queste scienze si è pur sempre partiti da impostazioni qualitative.

Da queste osservazioni sembra dunque che in tutte le scienze si stia seguendo un cammino che va dai modelli concettuali, che si servono del linguaggio di tutti i giorni, fino ai modelli matematici, compiutamente formalizzati e quantificati. In effetti, ragionare in questi termini costituisce una forzatura dello sviluppo storico effettivo di queste discipline, che è in effetti più complesso, ma è uno schema a suo modo stimolante, che utilizzeremo qui per fare alcune riflessioni.

Le fasi di passaggio dal modello concettuale (che rappresenta la formalizzazione del problema mediante il linguaggio comune, grafici di relazione o disegni) al modello matematico vero e proprio non devono necessariamente essere successive l'una all'altra. Allo stesso modo la struttura formale, nella quale ordinare i fenomeni, ha precedu-

to talvolta la raccolta di dati quantitativi ma, più spesso, è accaduto il contrario. Più frequentemente ancora c'è stato uno sviluppo alternante, con fasi di raccolta di dati e di sintesi teoriche che si succedevano secondo uno schema che può essere descritto efficacemente dalla formula dell'*inverare il certo e accertare il vero* di Gianbattista Vico.

In ogni caso un modello formale astratto è quasi sempre privo di interesse, e forse anche di significato, se non si può procedere alla sua convalida mediante dati sperimentali quantitativi, e se non può essere impiegato per prevedere le risposte che il sistema rappresentato da quel modello darà a nuove e diverse sollecitazioni. Ma anche un insieme molto ricco di dati rimane poco significativo e poco utilizzabile se non lo si inquadra in un modello di sintesi.

Rimane il problema di capire perché, nel passaggio dai modelli concettuali ai modelli matematici, le diverse scienze abbiano seguito tempi diversi. Semplificando e banalizzando si potrebbero individuare due fattori principali: la maggiore o minore semplicità delle leggi matematiche che descrivono i fenomeni e il fatto che i fenomeni elementari pertinenti si presentino, nella realtà concreta, a volte isolati e a volte commisti con altri fenomeni pertinenti. Con riferimento a questo secondo aspetto ci si potrebbe servire dell'analogia, forse un po' ardita ma suggestiva, tra il rapporto segnale/disturbo come è considerato nella teoria dell'informazione e nella pratica delle telecomunicazioni. Il fenomeno elementare pertinente costituisce l'equivalente del messaggio che deve essere estratto da un segnale corrotto da disturbi e da rumori di fondo. Quanto più elevato è il rapporto segnale/disturbo tanto più facile è la ricostruzione del messaggio.

Considerando i due fattori citati, viene spontaneo pensare anzitutto che si siano sviluppate prima le discipline scientifiche alle quali erano pertinenti leggi semplici, e in seguito quelle i cui fenomeni sono intrinsecamente più complicati. Ed è anche spontaneo pensare che si siano svi-

luppate prima le discipline relative allo studio di fenomeni che si presentano in forma isolata o con scarsa commistione con altri fenomeni (situazione che corrisponde a un alto rapporto segnale/disturbo) e solo successivamente quelle che riguardano fenomeni che si presentano sempre collegati tra loro.

Queste considerazioni ci dicono perché, all'inizio dell'età moderna, si siano sviluppate come scienze autonome anzitutto la meccanica e l'astronomia. In entrambe, i fenomeni che allora erano di maggiore interesse sono rappresentati da leggi molto semplici (le leggi elementari della dinamica, la legge della gravitazione). In astronomia, nella quale non si possono fare esperimenti, i fenomeni considerati in quella fase del suo sviluppo (i moti dei pianeti e delle comete) si presentano in forma quasi pura (il moto di un pianeta è determinato dal Sole e influenzato dagli altri pianeti in misura molto piccola, il che significa che il rapporto segnale/disturbo è molto elevato); nella meccanica, da Galileo in avanti, si adottarono il metodo sperimentale e il punto di vista analitico che vedevano il fenomeno studiato in forma isolata, perturbato il meno possibile dagli altri fenomeni in gioco. Così Galileo, per esempio, sperimentava la caduta dei gravi facendo rotolare una biglia lungo un piano inclinato, ma si preoccupava di fare in modo che il piano fosse quanto più levigato possibile per ridurre gli effetti degli attriti fino a valori trascurabili, e cioè (per continuare a usare l'analogia prima introdotta) per migliorare il rapporto segnale/disturbo.

Altri problemi di astronomia, altri capitoli della fisica (la termologia, l'elettromagnetismo), altre scienze, come la chimica, si sono sviluppate più tardi perché le relative leggi erano intrinsecamente meno semplici o perché era più difficile concepire e realizzare l'esperimento desiderato eliminando le concause perturbanti.

Nella biologia ci sono stati ritardi nell'uso di modelli matematici proprio perché i fenomeni anche più semplici della vita sono intrinsecamente complessi e, quindi, per

descriverli occorrono leggi complicate, ed è sempre difficile concepire esperimenti che si conservino significativi pur essendo semplici.

Queste considerazioni valgono a maggior ragione per le scienze dell'uomo e della società, il cui ritardo nell'uso dei modelli matematici si spiega da un lato con l'impossibilità o l'illiceità di esperimenti con le caratteristiche appena ricordate, e dall'altro con l'intrinseca complessità dei fenomeni da esaminare.

Naturalmente il problema è aperto ed è ricco di implicazioni filosofiche. È necessario pensare che le scienze della natura e quelle dell'uomo e della società debbano seguire lo stesso percorso evolutivo? O supporre che il loro sviluppo avvenga secondo il medesimo schema anche se con inizio e durata diversi? Quest'ultima impostazione, condivisa dai positivisti e dai loro eredi, è invece combattuta dai seguaci di altre scuole. Per esempio il filosofo tedesco Wilhelm Windelband, nel quadro della filosofia dei valori, sosteneva che le scienze della natura sono, nella loro essenza, diverse da quelle dell'uomo e della società, perché le prime hanno scopi «nomotetici», cioè indirizzati alla formulazione di leggi generali, mentre le seconde hanno intenti «idiografici», cioè rivolti alla descrizione di singole situazioni particolari.

Qui non si vuole entrare nel merito di una disputa di questo tipo; ci si limita a constatare che, anche nel campo delle scienze dell'uomo e della società, è vivissimo l'interesse per i modelli e si cerca di pervenire a modelli sempre più perfettamente formalizzati e sempre più largamente quantificati. Il ritardo nella formulazione di modelli soddisfacenti in queste discipline nel confronto della fisica, della chimica e delle scienze della vita si può interpretare ricorrendo alle considerazioni alle quali si è accennato.

4.7 *La scelta della scala temporale*

Si è visto che un modello è considerato utile se riesce a giustificare gli aspetti del comportamento di un sistema originale che sono *pertinenti* al punto di vista da cui si considerano i fenomeni, nonostante vi possano essere dei limiti per le ipotesi, implicite o esplicite, in base alle quali il modello è stato costruito. Questo è valido anche quando si faccia riferimento alla scelta dell'orizzonte temporale entro il quale si considera valido il modello.

Le unità di misura del tempo, naturalmente, possono essere molto diverse a seconda delle applicazioni. I tempi caratteristici dell'evoluzione del cosmo sono enormemente maggiori di quelli dell'evoluzione geologica della Terra, e questi a loro volta sono di ordine di grandezza diverso rispetto ai tempi caratteristici dell'evoluzione biologica; scale di tempi ancora inferiori caratterizzano l'evoluzione dell'uomo, la sua storia e la sua vita individuale.

In generale è difficile trovare un modello che sia abbastanza semplice e che nello stesso tempo sia valido per fenomeni che si svolgono in milioni di anni e fenomeni che richiedono frazioni di secondo.

L'importanza della scelta della scala temporale da prendere in considerazione nella costruzione di un modello può essere chiarita facendo riferimento alle figure 4.4-4.7, che riguardano la crescita di una popolazione animale in un ambiente con risorse rinnovabili limitate (che determinano quella che gli ecologi chiamano la capacità portante di una popolazione).

La figura 4.4 rappresenta il fenomeno lungo un arco di tempo piuttosto esteso.

Guardando le cose nell'intervallo di tempo compreso tra t_0 e t_1 si può dire che la popolazione tende ad aumentare, in una prima fase rapidamente, poi più lentamente finché tende a raggiungere il valore che corrisponde alla capacità portante. In termini formali si può dare del fenomeno un modello di crescita attraverso una curva con un

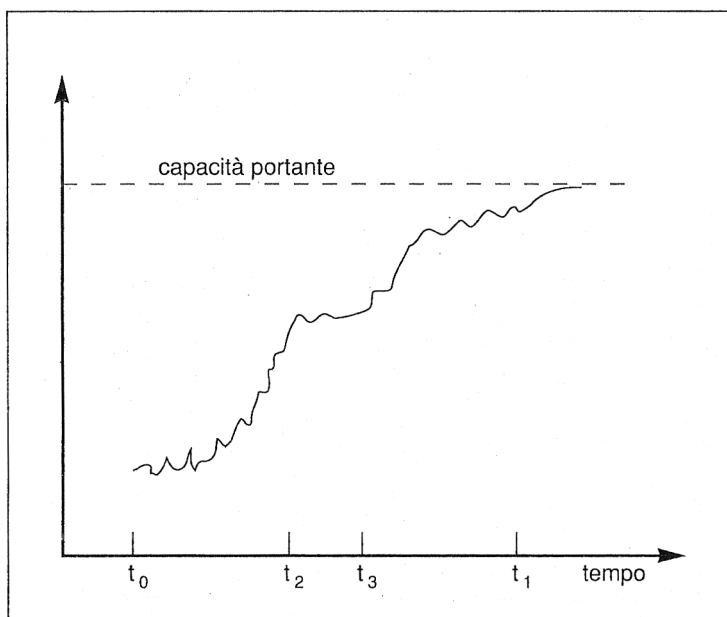



Fig. 4.4 Curva sperimentale della crescita di una popolazione con risorse rinnovabili limitate. La popolazione cresce fino a raggiungere un valore limite, la capacità portante, e poi si mantiene costante.

andamento ben preciso, chiamata *funzione logistica*, alla quale corrisponde l'andamento «sigmoide» della figura 4.5.

La crescita «a logistica» rappresenta la soluzione di equazioni che corrispondono a ipotesi ben precise sul legame fra i coefficienti di natalità e di mortalità e le risorse disponibili.

La curva teorica di figura 4.5 si discosta un po' dalla curva «sperimentale» di figura 4.4. In quest'ultima possiamo individuare alcune oscillazioni di modesta ampiezza e di periodo abbastanza lungo, alle quali si sovrappone, come in tutte le curve sperimentali, il rumore di fondo, di tipico carattere aleatorio, di ampiezza limitata e di alta frequenza.

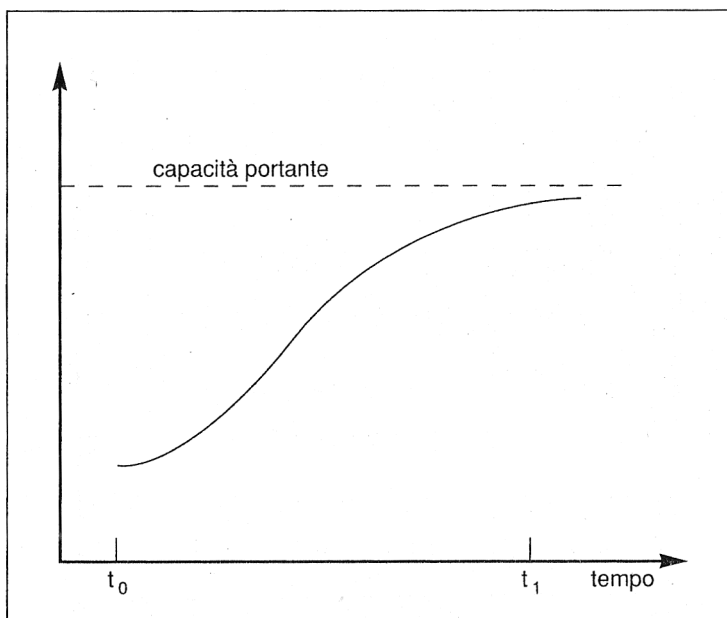



Fig. 4.5 Curva teorica che interpola la crescita della popolazione illustrata nella figura precedente.

Per studiare il fenomeno nell'arco di tempo da t_0 a t_1 è lecito ripulire la curva della componente aleatoria ed eventualmente anche dalla oscillazione lenta, poiché il fenomeno che ci interessa su quell'intervallo è l'andamento sigmoide. Se però avessimo considerato per esempio solo l'intervallo di tempo compreso tra t_2 e t_3, riportato, espandendo la scala dei tempi, nella figura 4.6, il fenomeno sarebbe stato interpretato in modo alquanto diverso e cioè come un fenomeno pressoché costante, con fluttuazioni di carattere aleatorio. Se infine ci si fosse limitati all'intervallo t_4-t_5 della figura 4.6, riportato in scala ulteriormente allargata nella figura 4.7 ci saremmo addirittura fatti l'idea di un fenomeno abbastanza regolare ad andamento discendente.

Dobbiamo concludere che è valido solo il primo mo-

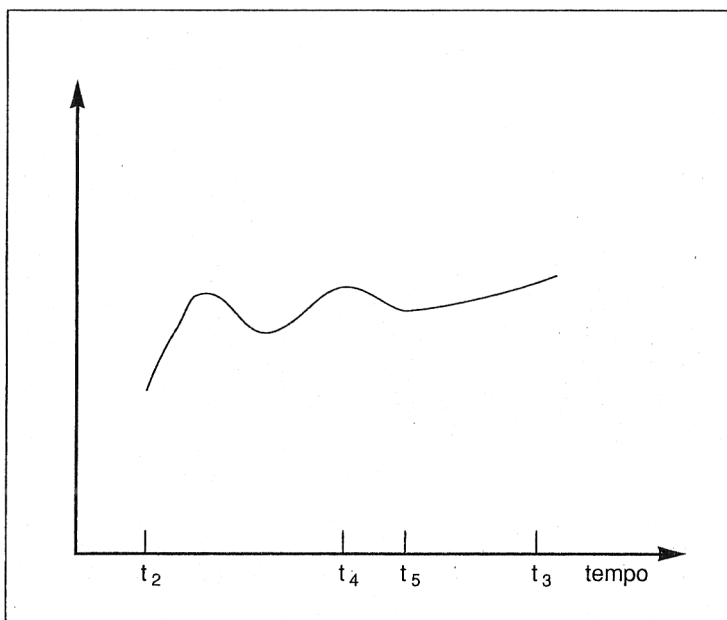



Fig. 4.6 Andamento della popolazione nell'intervallo di tempo t_2-t_3 della figura 4.4. Il fenomeno ha in questa fase un andamento quasi costante.

dello e che negli altri due casi si è compiuta una scelta sbagliata dell'orizzonte temporale e della scala di osservazione?

Dipende. Certo la prima schematizzazione corrisponde a un modello interpretativo ricco di significato. Ma se si devono effettuare previsioni a breve o a brevissimo termine, gli andamenti relativi all'intervallo t_2-t_3 o all'intervallo t_4-t_5 potrebbero apparire preferibili.

In conclusione si può dire che allargando o stringendo l'orizzonte temporale è possibile passare a modelli che risultano anche profondamente diversi fra loro ma che possono risultare tutti utili, sia pure in campi diversi.

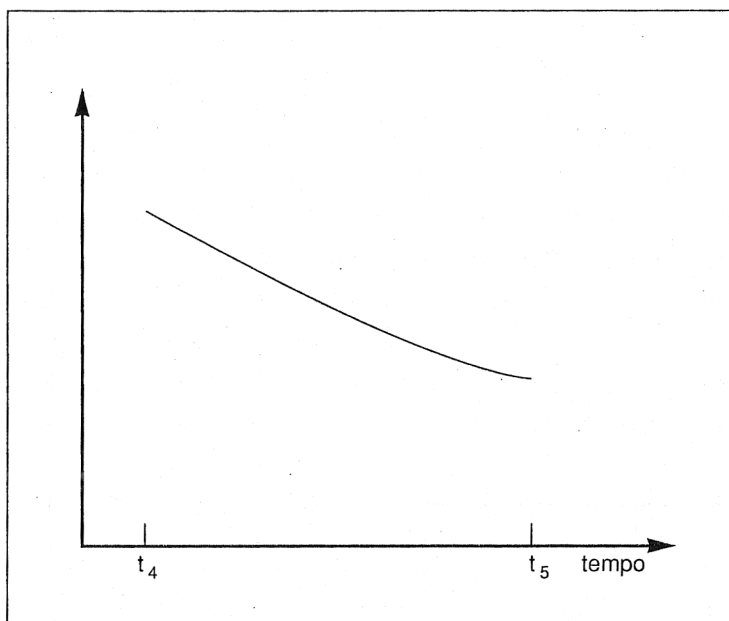



Fig. 4.7 Andamento della popolazione nell'intervallo di tempo t_4-t_5 della figura 4.6. In questo caso il fenomeno appare decrescente.

4.8 *Modelli e metafore*

L'uso di modelli porta a pensare, non sempre in piena consapevolezza, che la realtà possa essere ricondotta a comportamenti idealizzati ciascuno dei quali è semplice e il cui numero è modesto. I numerosissimi, più o meno complicati, comportamenti reali possono essere ricondotti o a uno di questi comportamenti idealizzati semplici o a una loro combinazione, secondo un numero abbastanza limitato di schemi diversi.

D'altra parte il calcolo combinatorio ci insegna che utilizzando anche pochi elementi, appartenenti anche a pochi tipi diversi, secondo schemi non troppo numerosi, si può ottenere un numero di combinazioni anche straordi-

nariamente elevato. Non a caso i primi matematici che si sono occupati di calcolo combinatorio hanno usato il punto esclamativo, simbolo del loro stupore, per designare il *fattoriale*, cioè il prodotto degli interi consecutivi a partire da 1 fino al generico numero n. La stessa sensazione di stupore ci coglie quando guardiamo le immagini di un caleidoscopio se pensiamo che si formano a partire da pochi pezzetti di vetro colorato riflessi su due o tre specchi. Esiste in proposito un apologo sull'inventore del gioco degli scacchi, che racconta che egli chiese al suo sovrano, come ricompensa per la sua invenzione, un chicco di grano per il primo riquadro della scacchiera, due per il secondo, quattro per il terzo, otto per il quarto, e così via, raddoppiando ogni volta. Per riempire tutti i riquadri della scacchiera sarebbero stati necessari 2^{64} chicchi di grano, un numero così enorme che sfugge all'intuito, e tale che avrebbe ipotecato per lungo tempo l'intera produzione di grano del pur vasto e ricco impero del sovrano, che aveva creduto con leggerezza che l'inventore avesse chiesto un premio irrisorio.

La metafora sostituiva spesso nell'antichità classica il modello; essa in fondo non è che l'indicazione di un caso concreto nel quale si attua, nella forma più semplice e più pulita, uno di quei comportamenti idealizzati che costituiscono la base per la schematizzazione di ciascun comportamento reale.

Riferendoci a modelli di evoluzione temporale, non mancano certamente immagini per rappresentare un andamento aleatorio, almeno apparentemente privo di qualsiasi regolarità, caotico: si possono innanzitutto ricordare i dadi (dal nome latino *alea* deriva il termine *aleatorio*) e accanto a questi il moto dell'acqua di un torrente in un vortice o la caduta di una foglia secca in una giornata di vento.

Per indicare fenomeni il cui comportamento sembra rimanere sempre uguale nel tempo, senza inizio né fine, si usano immagini come quella della roccia o della quercia, che però sembra più appropriata per rappresentare feno-

meni che hanno avuto una crescita iniziale e che hanno poi raggiunto un livello di assestamento che sembra destinato a durare indefinitamente.

Fenomeni di questo genere sono certamente rari: più comune è il caso in cui alla nascita e allo sviluppo succedono la decadenza e la morte, e in questi casi la metafora più diffusa è quella del corso diurno del Sole. Alba, meriggio, tramonto vengono spesso riferite alla vita dell'uomo o all'evoluzione di una civiltà.

Il corso del Sole, però, che si ripete ogni giorno, cui è legata la luminosità del cielo, costituisce una simbolizzazione suggestiva anche per i fenomeni che hanno carattere periodico, che si ripetono in cicli regolari. A questi fenomeni offrono suggestive immagini anche le stagioni dell'anno, specialmente nel modo in cui si manifestano nel Mediterraneo, culla delle culture che hanno fatto uso delle immagini che abbiamo citato.

La storia delle parole è spesso anche la storia delle idee. Così, passando in rassegna alcune metafore del nostro linguaggio corrente, la maggior parte delle quali risalgono all'antichità classica, ci rendiamo conto che nessuna di queste è adatta a rappresentare l'andamento di crescita illimitata del progresso. L'idea di progresso oggi è certamente in crisi, ma molte generazioni vi hanno creduto. In ogni modo non è necessario che l'orizzonte temporale di validità di un modello si estenda all'infinito (in entrambe le direzioni): con un modello si può rappresentare l'andamento attuale di un fenomeno e ricavare efficaci estrapolazioni anche senza che esso sia valido per tutti i tempi. È lecito adottarlo anche ignorandone l'orizzonte temporale e il modello che dovrà sostituirlo quando non fosse più valido.

Oggi anche chi non crede più ciecamente in un progresso indefinito può usare modelli di crescita esponenziale per descriverlo, ma nel mondo classico e nel medioevo non vi erano metafore che indicassero una crescita illimitata. Non si concepivano forme di crescita che non fossero

seguite da una stabilizzazione (la quercia), o da un occaso (il corso del Sole), o eventualmente dal ripetersi ciclico di altre crescite e altre decadenze (il rinnovarsi del corso del Sole rappresentato dalla immagine mitica della fenice che risorge dalle sue ceneri, il rinnovarsi delle stagioni dell'anno, il fluire e rifluire della marea).

Può essere utile, a questo punto, ricordare quanto si era detto nel primo capitolo e cioè che schemi a retroazione molto semplici (che usano un piccolo numero di componenti appartenenti a un piccolo numero di tipi diversi) hanno la possibilità di illustrare un gran numero di comportamenti differenziati tra loro come la crescita fino a un valore costante, i cicli, la crescita esponenziale e altri ancora. Non farà meraviglia, quindi, che possano venire suggeriti modelli a retroazione per spiegare il comportamento di fenomeni che appartengono a discipline diverse. Alla presentazione di questi modelli sono dedicati, come si è detto, i capitoli successivi, che trattano dei modelli a retroazione nella fisica, nell'economia e nelle scienze della vita e in ultimo nella cibernetica.

5. Modelli a retroazione nella fisica

Parlare di modelli interpretativi a retroazione nel campo della fisica pone qualche difficoltà, prima di tutto per la scelta dei fenomeni da prendere in considerazione, fra i moltissimi che si presterebbero allo scopo, e poi per la distinzione, spesso arbitraria, fra i casi in cui la retroazione è nelle cose e quelli in cui è nel modo di rappresentarle.

Per tali motivi ci si limiterà a pochi esempi, volutamente elementari.

Cominciamo a prendere in considerazione il caso del dinamometro, cioè della forma più semplice di bilancia a molla (fig. 5.1). La prima considerazione che possiamo fare per descrivere il sistema è quella di constatare che la forza applicata (il peso P) provoca una deformazione della molla tanto maggiore quanto più elevata è la forza stessa.

Se adottiamo l'ipotesi di linearità (che Robert Hooke aveva enunciato nel 1678 nella forma: «ut tensio sic vis») possiamo dire che lo spostamento Δl dell'indice del dinamometro rispetto alla posizione di riposo è proporzionale alla forza P applicata:

$$\Delta l = k P \tag{5.1}$$

Così, letta la posizione dell'indice sulla scala del dinamometro preventivamente tarato (che significa noto il valore di k), possiamo conoscere il valore di P. La (5.1) tuttavia non suggerisce in alcun modo la presenza di retroazione (vedi figura 5.2). Possiamo però interpretare il sistema

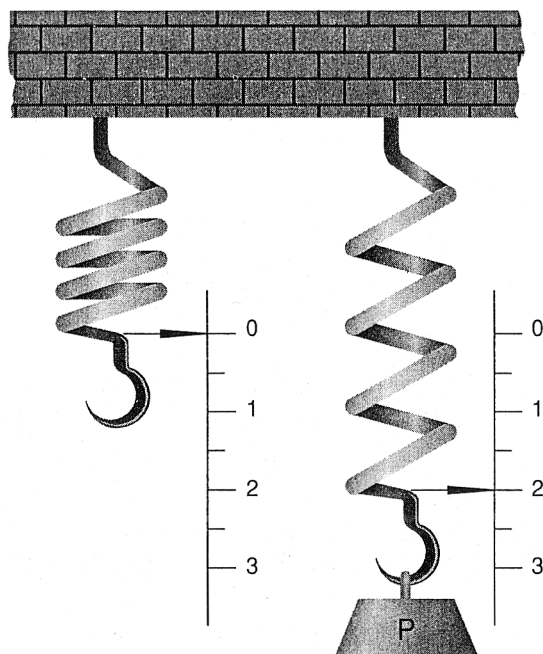



Fig. 5.1 Bilancia a molla (dinamometro). Nella posizione di riposo della molla l'indice è sullo zero della scala graduata (*a sinistra*). Quando viene sottoposta a un peso P la molla si tende e l'indice segna sulla scala il valore del peso.

anche da un altro punto di vista: la reazione elastica della molla oppone una forza uguale e contraria a quella esercitata dalla forza peso.

La reazione elastica R è legata alla deformazione Δl dalla legge:

$$R = -\frac{1}{k}\,\Delta l \tag{5.2}$$

dove il segno negativo indica che la deformazione avviene in verso opposto a quello della forza R.

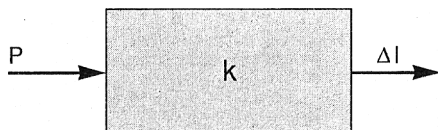



Fig. 5.2 Schema del sistema dinamometro-peso applicato. Lo spostamento del dinamometro, in uscita, è proporzionale al peso applicato, in ingresso.

Quando applichiamo un peso, che esercita sulla molla una forza P, questa si combina con la reazione elastica R e possiamo dire che variazione Δl è data dalla somma algebrica delle due forze (vedi figura 5.3). All'inizio, quando $\Delta l = 0$, si ha $R = 0$, quindi la risultante delle forze coincide con P, e provoca lo spostamento verso il basso dell'estremo libero della molla. A ogni valore non nullo di Δl corrisponde un valore non nullo di R, che si oppone a P. Finché prevale P la molla continua ad allungarsi. Quando infine R è uguale e opposta a P, la risultante delle due forze è nulla e la molla cessa di allungarsi. Il valore Δl^* corrispondente alla situazione di equilibrio ($P + R = 0$) è quello per cui vale:

Fig. 5.3 Schema a retroazione del sistema dinamometro-peso applicato, tenuto conto del fatto che la molla del dinamometro esercita una reazione uguale e contraria a quella esercitata dalla forza peso.

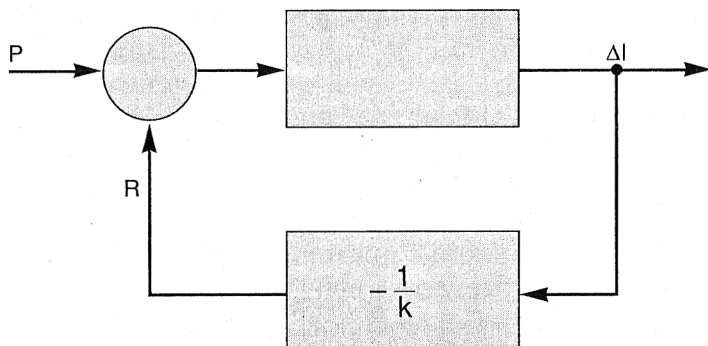
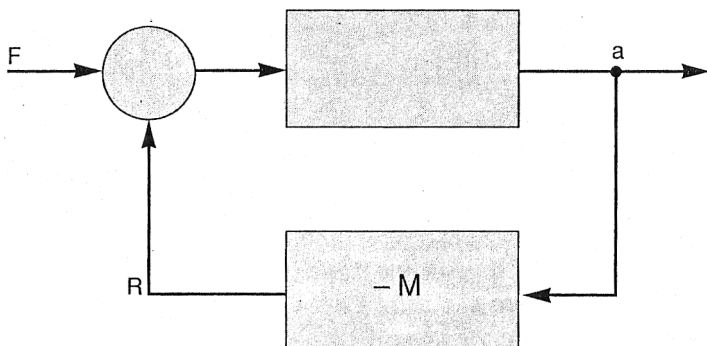



Fig. 5.4 Schema a retroazione per la seconda legge della dinamica, vista come una legge di equilibrio tra forze. La forza applicata produce una accelerazione, che a sua volta scatena una reazione (inerzia), che va a sommarsi alla forza stessa.

$$P = -R = \frac{1}{k} \Delta l^*$$

Questo modo di vedere le cose è lo stesso che sta alla base del *principio di d'Alembert*, che ci consente di formulare le leggi della dinamica (che legano fra loro le forze, le accelerazioni, le velocità e le posizioni di un corpo in movimento) come leggi di statica (basate sul solo equilibrio di forze). La formulazione più usata della seconda legge della dinamica è:

$$F = M a \tag{5.3}$$

secondo la quale una forza F applicata a un corpo di massa M gli imprime una accelerazione di valore $a = F/M$. Se la forza è costante, il moto è uniformemente accelerato. La (5.3) può essere scritta anche nella forma:

$$F - M a = 0$$

In questa forma la legge assume l'aspetto di una legge di

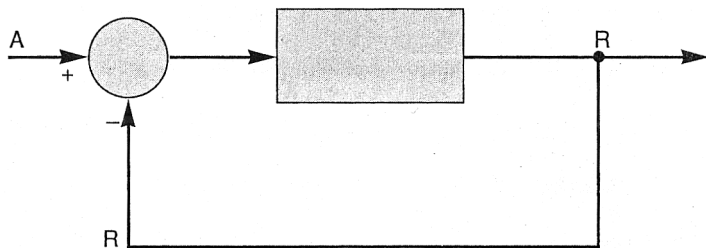



Fig. 5.5 Schema a retroazione per il principio di azione e reazione.

equilibrio tra forze, a patto di interpretare — $M\,a$ come una forza d'inerzia, cioè come una sorta di reazione sviluppata dalla massa.

Anche in questo caso quindi possiamo pensare a uno schema a retroazione, che è quello rappresentato in figura 5.4. L'accelerazione a è l'uscita di un blocco, al quale deve essere attribuita una relazione funzionale tale per cui a non varia se l'ingresso del blocco (la somma algebrica di F e di R) è nullo, il che avviene quando F e R sono uguali e opposte. Ma poiché R dipende da a, l'equilibrio si ha quando quest'ultima assume il valore che soddisfa la (5.3).

In generale la terza legge della dinamica (*a ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria*) implica schemi a retroazione di questo tipo. Il modo più semplice di interpretare questa legge con uno schema a blocchi è quello della figura 5.5 (che corrisponde alle figure 5.3 e 5.4 con l'uscita in corrispondenza di R anziché di Δl e di a). Nella figura 5.5 il blocco rettangolare (come nei casi delle due figure precedenti) è caratterizzato dal tipo di relazione funzionale tale che quando il suo ingresso è nullo la sua uscita non varia. È chiaro quindi che una situazione di equilibrio permanente si può avere solo quando la reazione R uguaglia l'azione A.

Più complesso, ma sempre basato sull'impiego di una catena chiusa di retroazione, sarebbe uno schema (che per semplicità si omette) nel quale R e A si influenzano reci-

procamente, anziché aversi, come in questo caso l'effetto di *A* su *R*.

Il principio di azione e reazione ha i suoi equivalenti anche in altri campi della fisica. Un caso particolare, molto noto a chi si occupi di fenomeni elettromagnetici, è quello espresso dalla legge di Lenz (1804-1865), che di solito viene enunciata nei seguenti termini: «la forza elettromotrice indotta in un circuito ha segno tale da produrre, se il circuito è chiuso, una corrente che, con la sua azione, tende a opporsi alla causa che l'ha generata». Nella figura 5.6, che descrive i legami fra le grandezze in gioco, si ha un flusso complessivo h che investe il circuito indotto. Questo è dato dalla combinazione di un flusso h_e agente dall'esterno e di un flusso di reazione h_r dovuto alla corrente i che circola nel circuito indotto. Le variazioni del flusso complessivo determinano la forza elettromotrice ε che, a sua volta, dà luogo alla corrente i. La legge di Lenz afferma, in altre parole, che la retroazione è negativa: se, per esempio, il flusso esterno aumenta e, quindi con esso aumenta anche il flusso complessivo, la corrente i generata sostiene un flusso di reazione che si sottrae al flusso esterno, determinando così una diminuzione del flusso complessivo. Gli effetti sono tali da opporsi alle cause che li provocano.

Un'enunciazione quasi identica ha il principio di Le Chatelier, detto anche principio dell'equilibrio mobile, che estende la legge di azione e reazione ai sistemi chimici. Il principio può essere formulato come segue: «In un sistema in equilibrio, la variazione di un parametro provoca una trasformazione che, se avvenisse da sola, farebbe variare in senso contrario il parametro stesso». In particolare, per esempio, un aumento della temperatura in una reazione chimica provoca lo spostamento della reazione nel verso in cui essa tende a provocare un raffreddamento. Analogamente, un aumento di pressione favorisce le reazioni che avvengono con diminuzione di volume, e cioè quelle che, se avvenissero spontaneamente, provochereb-

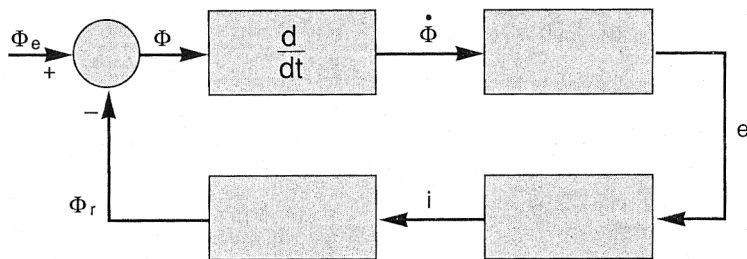
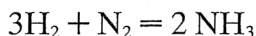



Fig. 5.6 Schema a retroazione negativa per la legge di Lenz dell'elettromagnetismo. La variazione di flusso elettrico in un circuito chiuso provoca un campo magnetico, il quale induce a sua volta una corrente il cui risultato è quello di diminuire il flusso stesso.

bero una diminuzione della pressione. Venendo a un esempio concreto, si consideri la reazione di sintesi dell'ammoniaca dagli elementi che la compongono, espressa dall'uguaglianza:

$$3H_2 + N_2 = 2\,NH_3$$

Questa legge è accompagnata da uno sviluppo di calore, è una sintesi esotermica. Ogni aumento di temperatura fa diminuire la quantità di ammoniaca che si forma all'equilibrio. D'altra parte, poiché la sintesi considerata fa passare dai quattro volumi gassosi iniziali ai due finali, quindi avviene con diminuzione di volume, un aumento di pressione sposta l'equilibrio da sinistra a destra (con aumento della resa in ammoniaca) appunto perché questo «effetto», se si verificasse indipendentemente, farebbe «variare in senso contrario» (cioè farebbe diminuire) la pressione, opponendosi alle cause che lo hanno provocato.

Come nel caso della legge di Lenz, lo schema a blocchi che descrive il principio di Le Chatelier presenta quindi una retroazione negativa, che contribuisce a mantenere lo stato di equilibrio malgrado continue perturbazioni, interne o esterne.

6. Esempi di retroazione nell'economia

6.1 *Alcune osservazioni preliminari*

In alcuni campi del sapere scientifico, grazie all'uso del metodo sperimentale, è possibile adottare il punto di vista analitico, utile per separare i fenomeni che nella realtà presa in esame possono essere inestricabilmente connessi. Il punto di vista analitico separa i diversi aspetti e l'esperimento consente di coglierli singolarmente e di descriverli con opportuni modelli matematici.

Questo procedimento, che ha avuto le sue prime applicazioni nella fisica e che è stato poi adottato in molte altre scienze, non può essere adottato in economia, dove non si può procedere con esperimenti che isolino artificialmente un singolo aspetto del fenomeno in studio ma dove è necessario osservare le cose nella inevitabile connessione dei diversi fenomeni.

Sul fatto che il ragionamento economico debba essere, se non formale, almeno formalizzato non c'è disaccordo. La controversia nasce quando si debba stabilire qual è la rilevanza pratica dei vari modelli. È tipico, in proposito, che i fautori delle diverse teorie si rimproverino reciprocamente di trascurare questo o quell'aspetto delle economie reali e che le controversie possano proseguire indefinitamente perché nessun modello, a rigore, può essere verificato o falsificato in base ai dati osservati. Del resto un modello è mentale che spiega come andrebbero le cose se la realtà fosse molto più semplice di quello che è. È comprensibile che l'atteggiamento più diffuso in economia sia

quello di ricorrere a più di un modello per spiegare vari aspetti di un fenomeno.

I modelli in economia sono di due tipi principali: quelli rigidamente causali, quali, per molti aspetti, quelli degli economisti classici, e quelli le cui variabili sono strettamente interdipendenti tra loro, quali i modelli walrasiani di equilibrio economico generale. I primi sono attraenti per la loro semplicità ma sono anche molto rudimentali, mentre i secondi, sofisticati e generali, proprio per essere nei casi estremi troppo generali, finiscono con il dire che tutto dipende da tutto e danno luogo a ben pochi risultati positivi.

La complessità della struttra considerata e delle sue interazioni interne non permette sempre di cogliere i legami forti, dei quali è necessario tenere conto anche nei modelli semplificati (distinguendoli dai legami deboli, che potranno essere trascurati), e questo non facilita il passaggio da un modello concettuale a un modello matematico operativo se non limitatamente a problemi specifici. È quindi ragionevolmente possibile costruire modelli descrittivi e predittivi per problemi ben definiti di dimensioni opportunamente limitate, ma è quasi impossibile sperare di metterne a punto per problemi più complessi. Resta però sempre la possibilità di dare modelli interpretativi, che verifichino la compatibilità del meccanismo con le linee di tendenza riscontrabili nella realtà. Come si è detto, si potranno formulare più modelli interpretativi diversi per uno stesso fenomeno, ma questi interesseranno più il matematico applicato che l'economista. Si può sempre sperare che da un paziente lavoro di confronto emerga l'indicazione di quale dei modelli considerati sia il più valido o, almeno, in quali circostanze è preferibile usare un tipo di modello e in quali un altro.

In questo contesto è facilmente immaginabile l'importanza che possono assumere i modelli a retroazione. La complicazione intrinseca dei fenomeni che si considerano implica che, molto spesso, se si considera l'effetto di una

grandezza B su una grandezza A non si può prescindere, se non in maniera inevitabilmente artificiosa, dal fatto che, simultaneamente e retroattivamente anche A influenza B, e ciò è alla base di quello che Jay Forrester chiama il «comportamento antiintuitivo dei sistemi sociali».

L'importanza del meccanismo di retroazione e di non considerare separatamente gli effetti di A su B da quelli di B su A possono essere messi in evidenza ricordando il dibattito sulla scala mobile, correlata ai fenomeni inflattivi che si manifestavano nel nostro paese nel periodo in cui l'inflazione era più pesante. Le controparti erano generalmente un rappresentante degli imprenditori e uno dei sindacati. Il primo incolpava la scala mobile del continuo aumento del costo della vita, in quanto essa era causa di maggiori costi di produzione, che venivano inevitabilmente a ripercuotersi sul prezzo dei prodotti. Il secondo ribatteva che era l'aumento del costo della vita a rendere inevitabile un adeguamento dei salari e che, comunque, questo era in ritardo rispetto alle cause che lo avevano provocato e solo parziale (insufficiente al recupero del potere d'acquisto). La verità è che le due grandezze si influenzano a vicenda. L'aumento dei costi dei prodotti, dovuto per esempio all'aumento del prezzo delle materie prime, determina un aumento del costo della vita al quale, in qualche modo, si dovrà cecare di porre rimedio con un adeguamento dei salari, ma l'adeguamento dei salari, aumentando il costo del lavoro, quindi i costi di produzione, determina a sua volta un aumento del prezzo dei prodotti e quindi del costo della vita. Vedere uno solo dei due rami in cui si articola questa catena chiusa è insufficiente, anche se l'analisi di ciò che avviene in corrispondenza a quel ramo è corretta.

Anche in questo caso il nostro obiettivo non sarà quello di presentare analisi economiche attendibili e, al limite, neppure completamente corrette, ma semplicemente di mostrare , attraverso due esempi di modelli interpretativi volutamente semplificati, il ruolo degli schemi a retroazione nella descrizione dei fenomeni economici.

6.2 *Il modello di Phillips di un'economia chiusa*

In un suo articolo del 1939 l'economista statunitense Paul Samuelson diede uno dei primi tentativi di formalizzare le leggi dei cicli economici mediante una spiegazione endogena, che teneva conto dell'interazione moltiplicatore-acceleratore. Nel 1950 John R. Hicks formulò una versione del modello di Samuelson che ebbe una diffusione più estesa, e a proposito della quale si parla di *modello di Samuelson-Hicks.* Ne sono state proposte poi modifiche e perfezionamenti, con lo scopo di renderne il comportamento più realistico, e si possono ricordare in proposito quelle dovute a Nicholas Kaldor (1940) e a Roy G.D. Allen (1960).

Il modello di Samuelson-Hicks è a tempo discreto, cioè divide il tempo in intervalli di durata finita focalizzando l'attenzione su ciò che avviene negli istanti di separazione fra un intervallo e il successivo.

Un modello simile, ma a tempo continuo, è stato sviluppato, invece, da Alban William Phillips nel 1954. Contrariamente al modello di Samuelson-Hicks, in cui si prende in considerazione il reddito, nel modello di Phillips si prende in considerazione la produzione. Phillips ha anche proposto una tecnica di intervento con scopi di stabilizzazione, basata sui risultati della teoria del controllo a retroazione come erano allora disponibili. Il modello è stato perfezionato, oltre che dallo stesso Phillips (1957), anche da altri autori, e sono state suggerite tecniche di intervento più sofisticate, del tipo di quelle che nel frattempo la *teoria del controllo ottimo* era andata sviluppando.

La forma più semplice del modello di Phillips è relativa al caso di un'economia chiusa, cioè al caso in cui si trascuri il settore delle transazioni economiche con l'estero.

Secondo questo modello, la produzione complessiva Y si adegua alla domanda aggregata Z secondo un'opportuna dinamica. Nel più semplice dei casi considerati da Phillips, se la domanda subisse una variazione brusca dal valo-

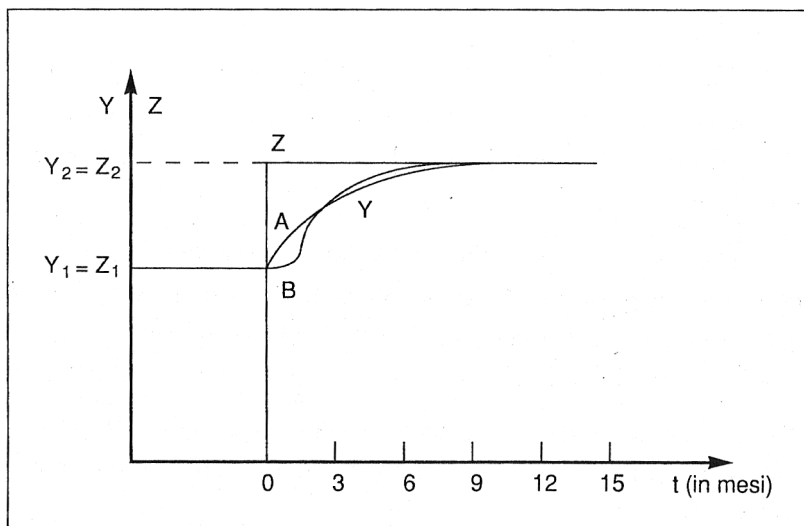



Fig. 6.1 Variazione della produzione Y (*curva A*) per una variazione brusca della domanda dal valore Z_1 al valore Z_2 secondo il modello di Phillips. La curva B corrisponde a un modello più elaborato.

re Z_1 al valore Z_2, la produzione varierebbe da $Y_1=Z_1$ a $Y_2=Z_2$ con l'andamento graduale rappresentato in figura 6.1 (curva A o, secondo un modello più elaborato, curva B). Phillips riteneva realistico, per il tempo in cui scriveva e per la situazione alla quale si riferiva, che la «costante di tempo» caratterizzante la legge di adeguamento della produzione alla domanda (cioè, in termini volutamente grossolani, il tempo necessario per compiere il 63% dell'escursione da Y_1 a Y_2) fosse dell'ordine di tre mesi. A sua volta, la domanda complessiva Z è la somma di tre termini: un addendo A, che non è legato direttamente a Y e dipende invece dalla politica di interventi pubblici, e due che dipendono dalla produzione e che si riferiscono ai consumi C e agli investimenti I:

$$Z = A + C + I$$

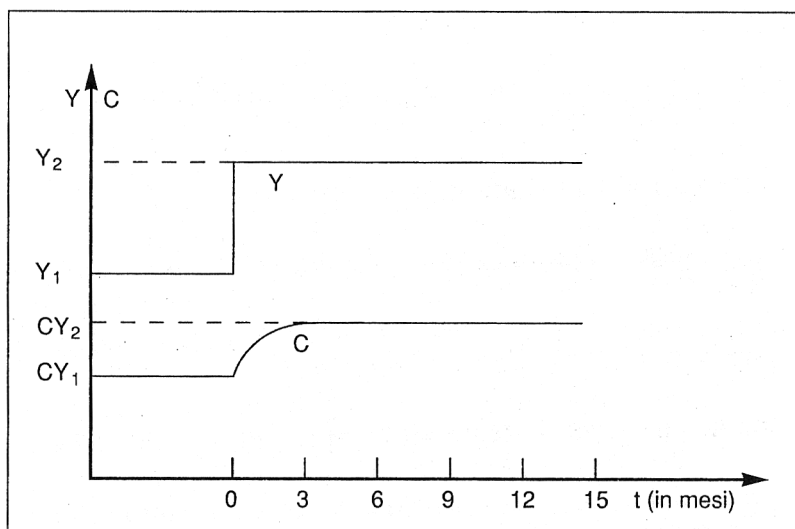



Fig. 6.2 Variazione delle spese per l'acquisto dei beni di consumo C in funzione di una brusca variazione della produzione dal valore Y_1 al valore Y_2 secondo il modello di Phillips.

Per quanto riguarda i consumi, il modello suppone che questi siano proporzionali alla produzione, secondo un coefficiente c (positivo e minore di 1) che viene chiamato *coefficiente di propensione al consumo* (ed è il complemento a 1 del *coefficiente di propensione al risparmio*).

In altre parole, in condizioni di regime permanente, con tutte le grandezze costanti, le spese C per l'acquisto di beni di consumo valgono cY mentre $Y - C = (1-c)\,Y$ viene risparmiato.

Il problema, però, deve essere visto in termini dinamici: si deve supporre che fra l'andamento nel tempo della Y e quello della C esista un legame funzionale tale che per esempio se Y è costante, C valga, come si è detto, cY, ma se Y subisce una variazione brusca da Y_1 a Y_2 (come mostrato in figura 6.2), C vari invece con gradualità da cY_1 a cY_2. Per la costante di tempo Phillips riteneva realistico il valore di un mese e mezzo.

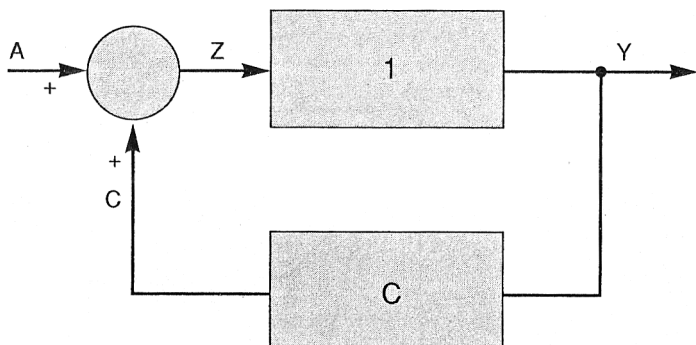



Fig. 6.3 Schema a retroazione del fenomeno del moltiplicatore, che descrive la dipendenza della domanda dalla politica degli interventi pubblici sommata alle spese per l'acquisto dei beni.

La dipendenza ipotizzata di C da Y dà luogo al cosiddetto *fenomeno del moltiplicatore.* Per illustrarlo supponiamo di poter trascurare gli investimenti (come nello schema di figura 6.3). In tal caso la retroazione è positiva e, in regime permanente, si ha:

$$Z = Y = A + C = A + cY$$

da cui si ricava la produzione:

$$Y = \frac{A}{1-c}$$

Poiché c è positivo e minore di 1, anche $1-c$ è positivo e minore di 1 e, di conseguenza, $1/(1-c)$, il *moltiplicatore*, per il quale si deve moltiplicare A per ottenere Y, è positivo e maggiore di 1. Questo dà un'idea dell'effetto sulla produzione di un intervento esterno.

Per esempio se $c = 0{,}9$ e quindi $1-c = 0{,}1$, un aumento di A, cioè degli interventi pubblici, a regime, darà luogo a un aumento della produzione dieci volte maggiore.

Per quanto riguarda gli investimenti I, il modello fa l'ipotesi che essi siano proporzionali alla velocità di variazione della produzione (cioè in termini formali alla sua derivata). In altre parole se la produzione tende a rimanere costante non si fanno nuovi investimenti né si disinveste; se la produzione tende a crescere si fanno nuovi investimenti; se la produzione tende a diminuire si disinveste. Anche nel caso degli investimenti, questi non sono esattamente proporzionali alla derivata della produzione ma tendono ad adeguarsi a essa con un certo ritardo.

La presenza dell'addendo I fra i termini della domanda aggregata e il fatto che questo sia legato alla tendenza secondo la quale la produzione varia danno luogo al cosiddetto *fenomeno dell'acceleratore.* Il coefficiente di proporzionalità che, nella vipotesi di linearizzazione, intercorre fra la derivata della produzione e il valore tendenziale degli investimenti, è un parametro molto importante. L'analisi della stabilità porta a concludere che se questo coefficiente è al di sopra di un determinato valore si ha una tendenza alle oscillazioni.

Il risultato può essere giustificato, dal punto di vista qualitativo, anche in termini intuitivi. Come è chiaro, infatti, un valore elevato di tale coefficiente corrisponde a una politica di investimenti molto «nervosa», in base alla quale si investe o si disinveste in misura massiccia a seguito di variazioni anche modeste della produzione. Ci si rende conto facilmente che una politica di questo genere porta a fenomeni di oscillazione. D'altra parte valori troppo modesti del coefficiente considerato corrispondono a una politica di investimenti insufficiente, con effetti negativi sulla produzione. Questo spiega perché gli economisti chiamano *acceleratore* il meccanismo descritto dalla derivata della produzione.

Il modello complessivo è descritto dallo schema a blocchi di figura 6.4. Si tratta sostanzialmente di un modello interpretativo. In assenza di interventi dall'esterno, ovvero con $A = 0$, per effetto delle interazioni dinamiche tra le di-

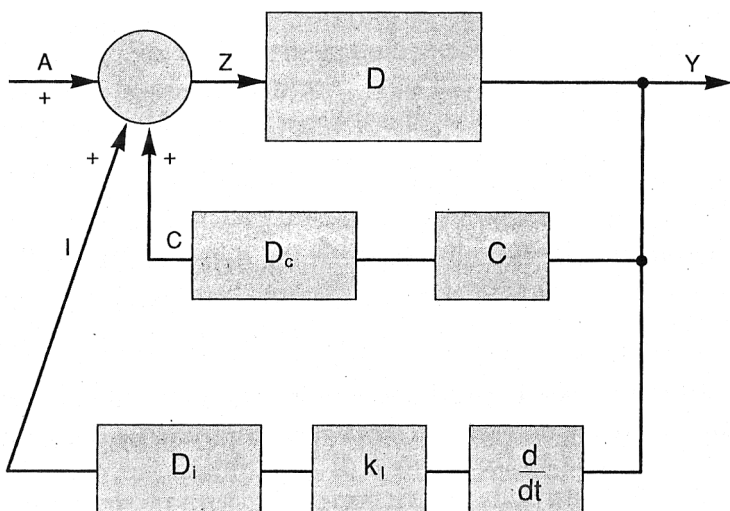



Fig. 6.4 Schema a blocchi del modello di Phillips con due cicli di retroazione positiva. In assenza di interventi pubblici (A=0) i due cicli a retroazione possono portare a un andamento oscillatorio del sistema.

verse grandezze in gioco, si ha una retroazione positiva, che si attua attraverso i due canali del moltiplicatore e dell'acceleratore e, come detto, la sua analisi porta a prevedere l'instaurarsi di andamenti oscillatori per certi valori dei parametri.

Phillips ha però proposto di usare il suo modello (adeguatamente perfezionato) anche per determinare l'andamento più opportuno da attribuire alla componente autonoma A della domanda aggregata Z (e cioè a quella dovuta agli interventi governativi); questo potrebbe imporre al sistema un comportamento più equilibrato, che smorzi le oscillazioni che altrimenti avrebbero luogo per l'interazione fra moltiplicatore e acceleratore (cioè per effetto della retroazione intrinseca caratteristica del sistema).

A questo proposito egli ha suggerito di concepire il sistema economico come un processo industriale da con-

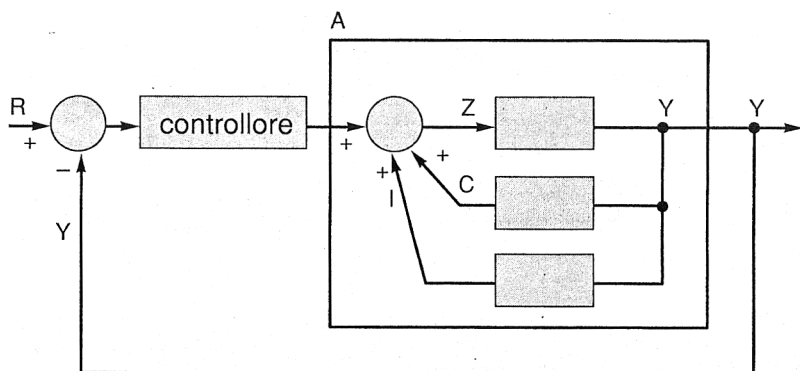



Fig. 6.5 Schema a blocchi perfezionato del modello di Phillips. Mediante l'introduzione di un controllore, il sistema è trattato come un processo di controllo industriale, in cui l'uscita, rappresentata dalla produzione, viene continuamente confrontata a un valore di riferimento. Con un'opportuna progettazione del controllore si ha uno smorzamento delle oscillazioni cui altrimenti sarebbe soggetto il sistema.

trollare a retroazione, misurando istante per istante il valore dell'uscita (la produzione *Y*), confrontandola con il valore di un andamento di riferimento desiderato, *R*, e, in base alla differenza fra *R* e *Y* (a mezzo di quello che in un impianto industriale sarebbe il controllore), trovare l'andamento di *A* (fig. 6.5).

Ai tempi in cui Phillips proponeva questa tecnica, il modo corrente di progettare un controllore era quello di far sì che la sua uscita (cioè la grandezza manipolata, nel nostro caso *A*) fosse una combinazione, secondo opportuni coefficienti, del suo ingresso (cioè della differenza *E* fra il valore desiderato *R* e il valore effettivo *Y* dell'uscita), dell'integrale di tale differenza e della sua derivata.

Phillips progettò questo controllore con tecniche empiriche. In particolare cercò di calibrare i coefficienti dei tre parametri (l'«errore» $E = R - Y$, il suo integrale e la sua derivata) in maniera tale che, se si fosse avuto uno sbalzo brusco dell'errore, il meccanismo di regolazione avrebbe

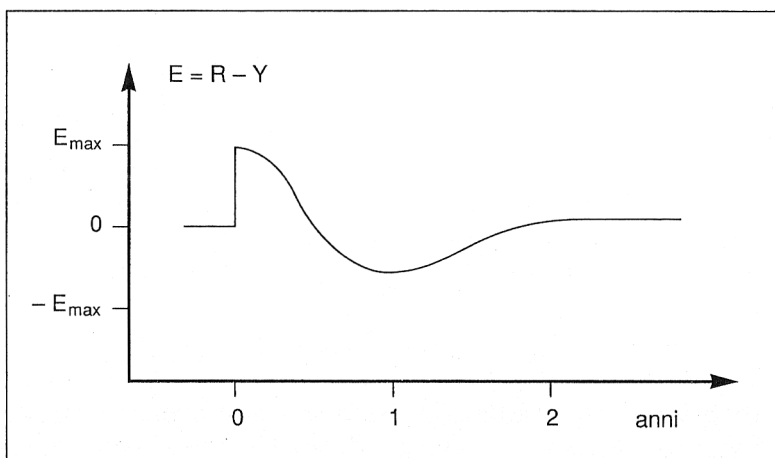



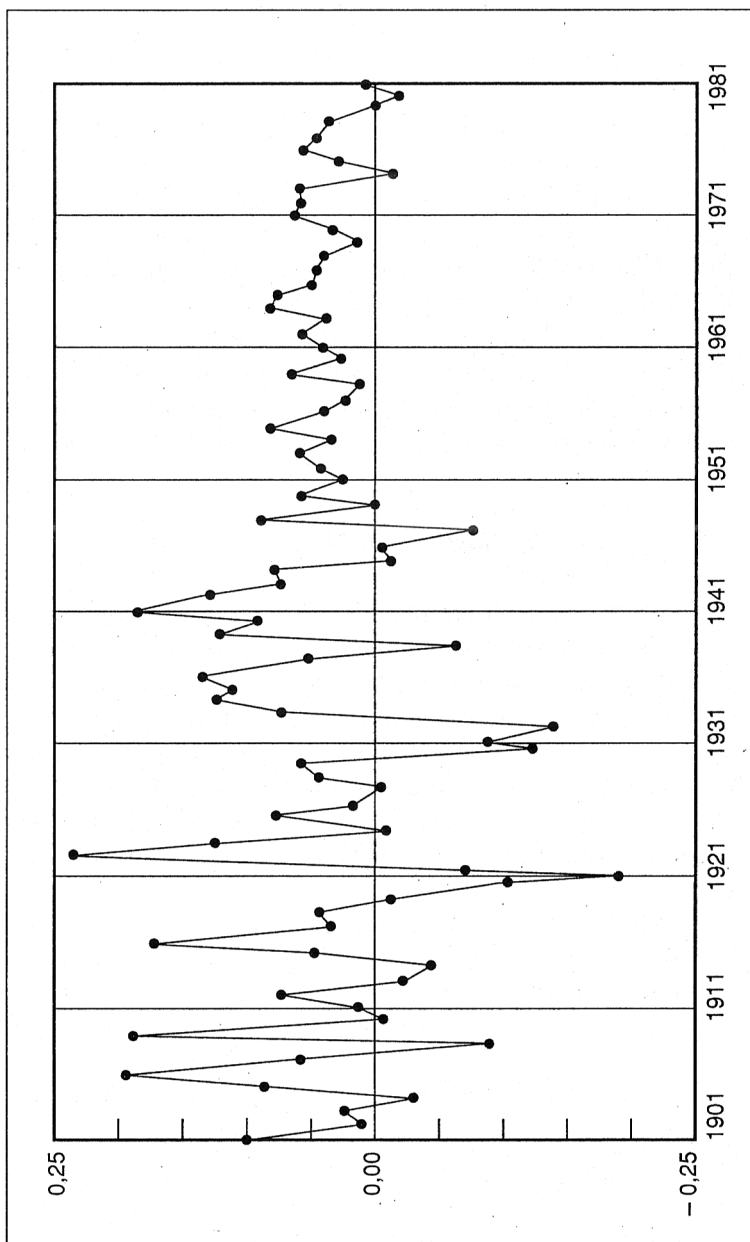
Fig. 6.6 Oscillazioni del sistema economico controllato di Phillips. Dopo circa due anni le oscillazioni vengono quasi completamente assorbite.

riportato a una situazione a errore nullo con un'oscillazione smorzata. In questa situazione dopo un anno si sarebbe avuto un massimo dell'errore, di segno opposto e di valore pari ai due terzi di quello iniziale, e dopo due anni l'oscillazione sarebbe stata completamente riassorbita (fig. 6.6). Nei calcoli di Phillips i valori dei tre coefficienti erano circa 2, 2 e 0,2.

Altri economisti hanno poi perfezionato il modello di Phillips (per esempio tenendo conto degli scambi con l'estero) e hanno proposto tecniche di controllo (sempre a retroazione) più sofisticate, alcune basate sulla teoria del controllo ottimo.

Il discorso però è rimasto alla fase degli studi teorici. Tuttavia (anche se gli interventi governativi non sono stati calcolati con le formule di Phillips) una migliore comprensione del meccanismo intrinseco dell'economia, in termini

Fig. 6.7 Andamento reale delle oscillazioni del sistema economico negli anni 1901-1981.

0,25
0,00
– 0,25
1901
1911
1921
1931
1941
1951
1961
1971
1981

più o meno keynesiani, ha portato a effetti di smorzamento delle oscillazioni analoghi a quelli ottenibili con la tecnica di controllo di Phillips (fig. 6.7). Come si può osservare, fino agli inizi degli anni Cinquanta si sono verificati sbalzi di reddito ciclici anche molto forti. L'andamento si è stabilizzato nei trent'anni successivi, a prescindere dalle due perturbazioni più gravi, in corrispondenza alle crisi petrolifere degli anni Settanta (nelle quali, però le oscillazioni sono state più modeste rispetto a quelle verificatesi nel primo cinquantennio del secolo). Secondo alcuni ciò si è verificato da quando gli economisti e i governi hanno cominciato a capire e ad applicare le teorie di Keynes.

6.3 *Le analisi dei classici e di Marx*

Phillips, che di formazione era un economista e non un tecnico, ha messo a punto il suo modello nella piena consapevolezza e conoscenza di come già la tecnica utilizzava la retroazione sia per i modelli interpretativi, sia per le tecniche di controllo. La stessa consapevolezza guidava il lavoro di un altro grande economista, Oskar Lange, polacco, che parlò di economia cibernetica per i suoi studi in cui modelli e tecniche a retroazione avevano un notevole rilievo.

È interessante, però, osservare che si possono trovare strutture a retroazione anche nelle analisi dei classici e di Marx, i quali non potevano far riferimento a una teoria della retroazione, che ai loro tempi non era ancora stata enunciata.

Nell'illustrare i passi che ci interessano, ci riferiremo a una impostazione «a tempo continuo», e utilizzeremo la terminologia di Forrester, che divide le variabili in due categorie, le variabili di flusso e le variabili di livello. Le variabili di flusso sono quelle che, in una analogia idraulica, potrebbero essere considerate corrispondenti alla portata, e le variabili di livello quelle che corrisponderebbero al

livello del liquido in un contenitore (e cioè a un fenomeno di accumulo delle variabili di flusso).

In questo contesto la produzione P viene pensata come una variabile di flusso e sarà espressa in termini di quantità prodotta nell'unità di tempo; è funzione di due variabili di livello, i mezzi di produzione M_p e il numero di addetti N (la forza lavoro):

$$P = f_p (M_p, N)$$

In prima approssimazione si potrà pensare che questa funzione corrisponda a un prodotto. Detraendo dalla produzione il consumo sociale C_s, legato evidentemente a N, e la spesa corrente C_m per la manutenzione e la sostituzione dei mezzi di produzione, si ha l'eccedente economico E_e:

$$E_e = P - C_s - C_m$$

Di tale eccedente, una frazione $k_e = 1 - k_a$ costituisce il cosiddetto fondo di consumo del capitalista F_c. La restante frazione k_a costituisce il fondo di accumulazione F_a:

$$F_e = k_e\, E_e = (1 - k_a)\, E_e$$
$$F_a = k_a\, E_e$$

Il consumo sociale, le spese di manutenzione e sostituzione e l'eccedente economico sono variabili di flusso. Il fondo di accumulazione si ripartisce secondo i coefficienti k_1 e $k_2 = 1 - k_1$ nelle due quote F_{am} e F_{an} destinate a incrementare i mezzi di produzione e la forza lavoro. Nella figura 6.8 è schematizzato il fenomeno: innanzitutto ciascuna delle due quote del fondo di accumulazione viene moltiplicata per coefficienti dimensionali opportuni k_m e k_n, poi sottoposta a opportune relazioni funzionali (rappresentate dai blocchi D_m e D_n) che giustiaficano la dinamica intrinseca del fenomeno, infine fatte passare attraverso un blocco che corrisponda ai fenomeni di accumulo che de-

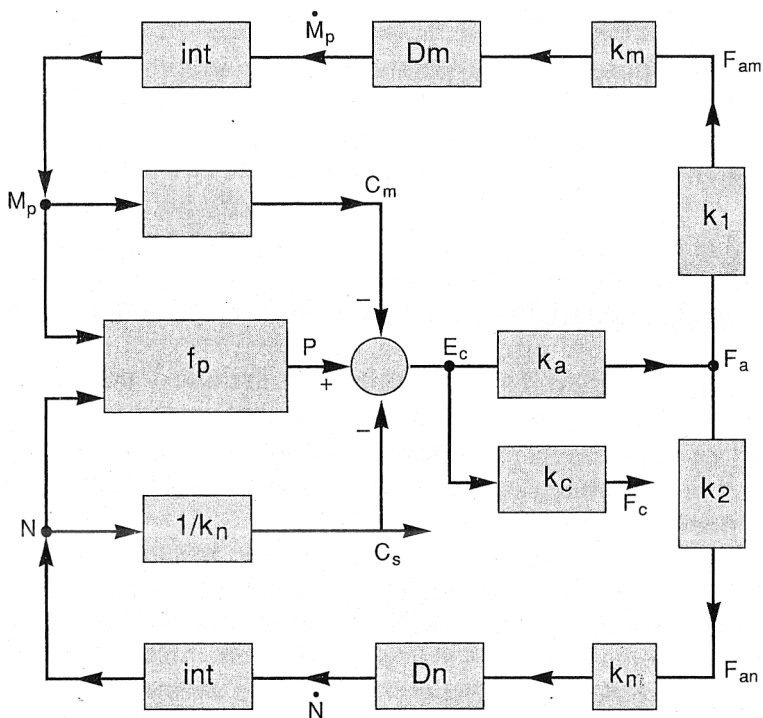



Fig. 6.8 Schema a doppio ciclo di retroazione che lega la produzione ai mezzi di produzione e alla forza lavoro.

vono intercorrere fra le variabili flusso uscenti dai blocchi D_m e D_n e le variabili livello M_p e N. In termini matematici quest'ultima operazione è una integrazione nel tempo. La funzione che rappresenta l'andamento nel tempo di M_p è l'integrale nel tempo della grandezza M_p in uscita dal blocco D_m, e questa ne è quindi la derivata rispetto al tempo (infatti in figura 6.8 questa grandezza è indicata con un puntino, uno dei simboli che si usano per la derivazione). Lo stesso discorso vale per il legame fra l'uscita N del blocco D_n e il numero degli addetti N.

Il consumo sociale C_s dipende da N e, almeno in regime permanente (cioè trascurando la dinamica intrinseca del fenomeno), può essere ottenuto da N moltiplicandolo per

un coefficiente che corrisponde al consumo medio del singolo lavoratore e che è quindi, sostanzialmente, l'inverso del coefficiente k_n. Analoghe considerazioni consentono di ottenere C_m da M_p. Questo schema può essere riformulato in termini omogenei se consideriamo il capitale costante in luogo dei mezzi di produzione e il capitale variabile in luogo della forza lavoro, la produzione P potrà essere espressa in funzione del capitale totale (dato dalla somma di quello fisso e di quello variabile) tenendo conto dei rapporti strutturali definiti in cui ha luogo l'accumulazione (cioè dell'importanza relativa di capitale fisso e capitale variabile).

Lo schema di figura 6.8 mette in evidenza due cicli di retroazione combinati fra loro. Uno mostra l'influenza di E_e su M_p il quale, a sua volta, retroagisce su E_e in modo negativo tramite C_m e in modo positivo tramite P. L'altro mostra, in modo perfettamente simmetrico, l'influenza di E_e su N, che retroagisce su E_e determinando il termine di reazione negativa C_s e contribuendo a determinare il termine di reazione positiva P.

In realtà il modello corrispondente alla figura 6.8 per molti versi deve essere considerato approssimativo. Potrebbe essere considerato valido se la dinamica che lega il consumo sociale C_s alla forza lavoro N fosse sufficientemente rapida in modo da poterla rappresentare con un coefficiente costante k_n. Il fenomeno in realtà è più complesso e richiede una modellizzazione più accurata. È proprio con riferimento a questo problema che differiscono le analisi di Ricardo e di Marx, di cui daremo una possibile interpretazione interessante dal punto di vista dei fenomeni di retroazione. Il modello, secondo la teoria di Ricardo, può essere articolato secondo lo schema di figura 6.9, con qualche semplificazione. Si consideri la catena che, nella figura 6.8, a partire dalla quota F_{an} del fondo di accumulazione, attraverso i blocchi k_n, D_n e attraverso l'integratore, fornisce il valore N della forza lavoro. In effetti questo valore di N, per il modo in cui è stato ottenuto, rappresenta

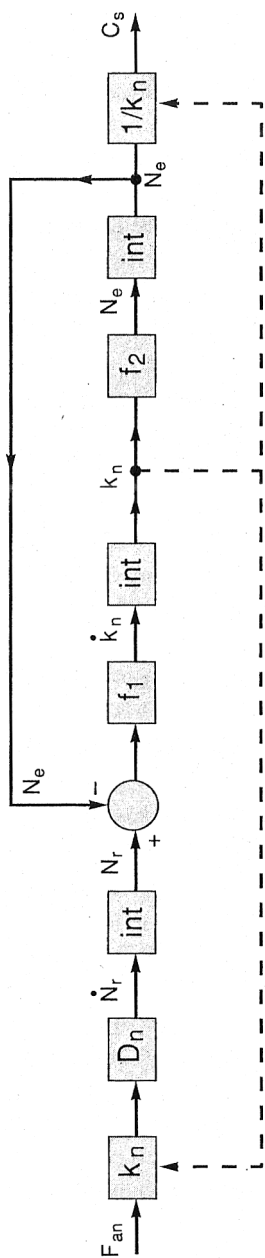



Fig. 6.9 Schema a retroazione della relazione tra il fondo di accumulazione F_{an} e il consumo sociale C_s secondo la teoria di Ricardo.

piuttosto un'offerta di posti di lavoro o, in termini di teoria del controllo, il valore di riferimento, che verrà quindi indicato con N_r, al quale va confrontato il valore effettivo N_e della variabile stessa.

La differenza fra le due grandezze, che può essere positiva o negativa, seguendo il meccanismo della domanda e dell'offerta, determina la tendenza alla variazione del livello dei salari. In figura 6.9 questo è rappresentato utilizzando la differenza $N_r - N_e$ come ingresso per un blocco (caratterizzato da una opportuna funzione f_1 che rappresenta la legge della domanda e dell'offerta) la cui uscita ($\dot{k}_n$) rappresenta la tendenza a variare del coefficiente k_n (e cioè formalmente, la sua derivata rispetto al tempo, da cui per integrazione si ottiene k_n).

Infine, secondo la teoria di Ricardo basata sulla teoria della popolazione di Malthus, il valore di N viene ricavato a partire dal valore di k_n. Secondo tale teoria l'incremento del prezzo del lavoro al di sopra di quello «naturale» (nella terminologia malthusiana), determina un incremento demografico poiché migliora le condizioni di vita dei lavoratori. Il tratto corrispondente a questo fenomeno è quello che in figura 6.9 fa passare da k_n a N_e, tramite una opportuna funzione f_2 e una integrazione nel tempo. N_e da un lato viene sottratta a N_r, e dall'altro, attraverso il blocco $1/k_n$ (modificato in base alla variazione di k_n di cui si è detto), dà luogo al consumo sociale C_s.

In prima approssimazione ci si può limitare a questa schematizzazione delle teorie di Ricardo, pur sapendo che una loro modellizzazione meno grossolana richiederebbe un'indagine più approfondita e più accurata. Un modello più preciso dovrebbe mettere in evidenza i ritardi che intercorrono fra l'incremento demografico e l'aumento effettivo della forza lavoro disponibile e giustificare la dipendenza del «prezzo naturale» del lavoro dal livello della popolazione, tenendo conto della legge malthusiana dei profitti decrescenti.

Anche limitandoci tuttavia al modello ottenibile inse-

rendo lo schema di figura 6.9 in quello di figura 6.8, si può attribuirgli un comportamento coerente con le tesi di Ricardo, secondo le quali per l'azione combinata della legge della popolazione e di quella dei profitti decrescenti si sarebbe dovuto pervenire a una stagnazione generale. Infatti l'anello di retroazione che ha N_r in ingresso e N_e in uscita include due integratori e, dalla teoria del controllo risulta che se gli altri parametri della catena sono tali da dare all'anello un comportamento stabile, il sistema tende ad annullare la differenza fra N_r e N_e, da cui dipendono le variazioni di k_n, mantenendo così i salari al «prezzo naturale».

La soluzione proposta da Marx potrebbe invece essere modellata attribuendo un carattere esogeno a N_e (cioè non facendolo dipendere dalle altre grandezze della catena) e tenendo in considerazione un elemento ulteriore, costituito dall'«esercito industriale di riserva», una massa di disoccupati, tipica del modo di produzione capitalistica, la cui concorrenza sul mercato del lavoro influenza il livello dei salari. Secondo Marx l'accumulazione determina un aumento dell'offerta di lavoro e quindi la riduzione dell'«esercito industriale di riserva». Ciò può portare a difficoltà nel reperimento della forza lavoro richiesta, da cui dipende un aumento del livello dei salari e del consumo sociale, quindi una diminuzione dell'accumulazione, un rallentamento dell'espansione economica e un incremento della disoccupazione con esiti destinati a sfociare nella crisi. Questo è, secondo Marx, il ciclo tipico del processo di accumulazione. Questa analisi presenta un'analogia davvero interessante con certe descrizioni tradizionali dei sistemi di regolazione e di controllo, tipiche nel periodo (detto scherzosamente di «preistoria» dei controlli automatici) antecedente alla formulazione della vera e propria teoria formalizzata del controllo.

Per una descrizione più dettagliata e formale del fenomeno riferiamoci all'anello che, nella figura 6.8, è formato dai blocchi k_a, k_2, k_n, D_n, dall'integratore e dal blocco corrispondente alla relazione tra N e C_s (che in questo caso non

sarà espressa dalla legge $1/k_n$). Questo anello di retroazione può risultare instabile in corrispondenza di opportuni valori dei suoi parametri, in particolare in rapporto a quello che, in termini di teoria dei sistemi a retroazione, potrebbe essere chiamato il suo «guadagno equivalente» (e non a caso la teoria riassunta mette in evidenza il tasso di accumulazione, cioè il valore di k_a).

Le oscillazioni persistenti che si verificano nel sistema in caso di instabilità possono costituire un'interpretazione formale, sebbene alquanto semplificata, del fenomeno delle crisi cicliche, ragguagliando sulle sue cause e sull'influenza dei diversi fattori in gioco.

7. Modelli a retroazione nella biologia

7.1 *Premessa*

Modelli a retroazione per la rappresentazione di fenomeni che interessano le scienze della vita sono stati proposti in gran numero e molti di questi sono stati perfezionati e messi a punto in modo da renderli idonei, con un sufficiente grado di precisione, a funzionare anche come modelli predittivi. Data la sterminata vastità della letteratura in argomento, che spazia dalla fisiologia all'ecologia, non ne daremo una panoramica completa, ma ci limiteremo all'esposizione di pochi modelli interpretativi volutamente elementari. Questi modelli, proprio perché semplificati, non danno una rappresentazione esauriente, realistica e dettagiata dei fenomeni che trattano, ma hanno ugualmente un loro intrinseco interesse perché, attraverso meccanismi a retroazione, ne colgono gli aspetti essenziali.

Ci si limiterà, inoltre, a due sole aree: la *dinamica delle popolazioni*, perché è qui che sono sorte le prime applicazioni di modelli matematici in biologia, con i lavori apparsi intorno alla metà degli anni Venti di questo secolo di A.J. Lotka e di V. Volterra, e le *regolazioni omeostatiche.*

7.2 *Dinamica delle popolazioni*

Una popolazione può assumere, a rigore, solo valori appartenenti all'insieme dei numeri interi non negativi e, di conseguenza, può subire variazioni di non meno di

un'unità per volta. Tuttavia nel caso di popolazioni sufficientemente numerose si ricorre spesso a modelli di tipo continuo, e d'altra parte questa schematizzazione è ineccepibile se, in luogo del numero di individui, si considera la biomassa, che per vari problemi è in effetti il parametro di maggior interesse. D'altra parte la schematizzazione che usa variabili continue è quella abitualmente adottata in fisica e in chimica anche se le variazioni in gioco (per esempio variazioni di massa) sono, a rigore, intrinsecamente di tipo discreto (in quanto corrispondono, per esempio, a variazioni del numero di molecole o di atomi).

Con riferimento a una schematizzazione continua si può dire che una popolazione $p(t)$ può essere vista, secondo l'abituale analogia idraulica, come il livello di un serbatoio interessato a un afflusso (il flusso delle nascite, eventualmente incrementato dal flusso delle immigrazioni) e a un deflusso (quello dei decessi, eventualmente incrementato da quello delle emigrazioni). In termini matematici la variabile di livello che rappresenta la popolazione sarà espressa dall'integrale della differenza dei flussi in gioco o, simmetricamente, si può dire che questa differenza coincide con la derivata rispetto al tempo della popolazione (che esprime il modo in cui essa tende a variare) e che verrà indicata, come d'abitudine, con $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$. Il flusso delle nascite è espresso in nati per anno, ed è proporzionale alla popolazione attraverso il coefficiente di natalità, k_n, che in specifiche circostanze socio-economiche si potrà ritenere costante su un intervallo di tempo abbastanza lungo. Il coefficiente k_n è espresso in nati per anno per ogni mille abitanti (il suo valore in Italia dal 1926 al 1985 è passato da 27 a 10). Se si moltiplica k_n per la popolazione p espressa in migliaia di abitanti si ottiene il flusso delle nascite. Considerazioni analoghe valgono per il flusso dei decessi, proporzionale alla popolazione p attraverso il coefficiente di mortalità k_m, espresso in morti per anno per ogni mille abitanti (il valore di questo coefficiente è sceso in Italia da circa 17 a circa 10 fra il 1926 e il 1948, con un andamento

abbastanza regolare se si trascura la punta di risalita a 15 verso la fine del secondo conflitto mondiale; dal 1948 al 1985 è rimasto pressoché costante, con piccolissime oscillazioni, poco al di sotto del valore 10). Sotto opportune ipotesi anche il flusso di emigrazione può essere considerato proporzionale alla popolazione secondo un coefficiente che, ai fini delle considerazioni che seguiranno, si conglobera in k_m. Invece il flusso di immigrazione costituisce un ingresso indipendente, che verrà indicato con r_i. Il valore di questo termine varia notevolmente da paese a paese e da periodo storico a periodo storico. Negli Stati Uniti, per esempio, ha avuto una grande importanza per tutto il secolo scorso e per i primi decenni di questo secolo.

Per quanto detto, adottando le ipotesi largamente semplificate alle quali si è fatto cenno, la dinamica del fenomeno è rappresentata dall'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p/\mathrm{d}t &= k_n\, p(t) - k_m\, p(t) + r_i\,(t) = \\ &= (k_n - k_m)\, p(t) + r_i\,(t) \end{aligned}$$

Il fenomeno può essere rappresentato con uno dei due schemi a blocchi di figura 7.1, che mettono in evidenza un anello di retroazione positiva, dovuto alle nascite, e uno di retroazione negativa, dovuto ai decessi.

Il modello può essere affinato tenendo conto del fatto che, nella maggior parte dei casi, k_n e k_m non sono costanti, ma variano in funzione del tempo (e in tal caso l'equazione non è più a coefficienti costanti) e talora anche in funzione di $p(t)$, per esempio per effetto dei *fenomeni di affollamento*, che tendono a far diminuire k_n e a far aumentare k_m al crescere di $p(t)$ (in tal caso l'equazione diviene nonlineare). Raggruppando la popolazione per fasce di età, per esempio tra 0 e 15 anni, tra 15 e 45 anni e oltre i 45 anni come in figura 7.2, il flusso delle nascite incrementa solo la prima fascia, ma è proporzionale quasi esclusivamente alla popolazione della seconda fascia. Inoltre la prima e la

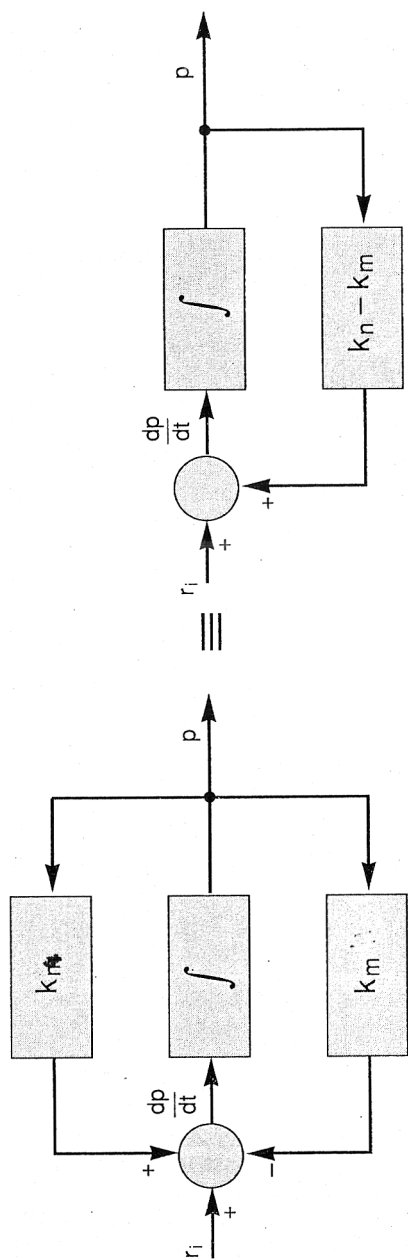



Fig. 7.1 Variazione di una popolazione nel tempo in funzione del numero di nascite e decessi e del flusso di immigrazione.

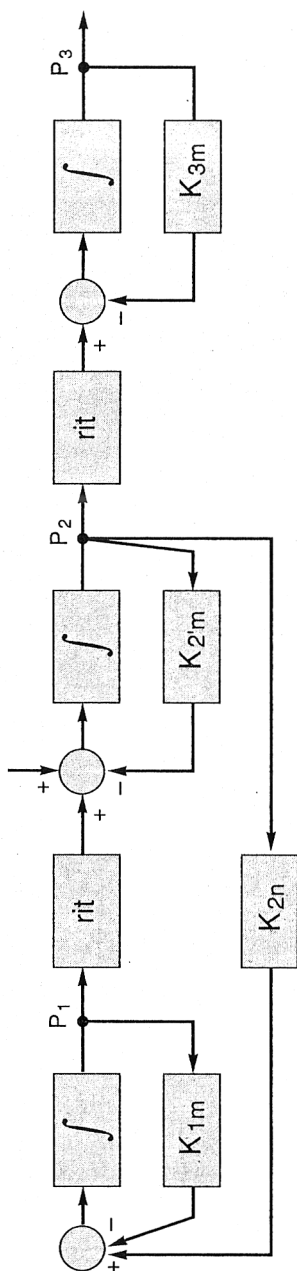



Fig. 7.2 Variazione di una popolazione nel tempo in funzione di nascite, decessi e del flusso di immigrazione. In questo caso la popolazione è divisa in tre fasce di età, in ciascuna delle quali la dipendenza dai tre parametri ha influenza differente.

seconda fascia variano non solo per gli effetti di mortalità (che sono piuttosto bassi) ma soprattutto per il passaggio da una fascia all'altra.

Se le variazioni di k_n e di k_m sono lente, il fenomeno può essere studiato come se questi parametri fossero costanti, purché ci si riferisca a un intervallo di tempo relativamente breve, durante il quale ai parametri stessi verranno attribuiti opportuni valori interni al loro campo di escursione nel periodo considerato. Di questo genere sono i modelli più semplici che studiano l'evoluzione della popolazione mondiale suddivisa in sottosistemi praticamente isolati o collegati da flussi migratori, considerando separatamente i paesi ad alto sviluppo, con coefficienti di mortalità e di natalità piuttosto bassi, quelli sottosviluppati, con mortalità e natalità molto elevate, e infine quelli in via di sviluppo, presso i quali è diminuito il coefficiente di mortalità mentre quello di natalità è rimasto a livelli elevati, dando luogo a breve termine a un impetuoso incremento demografico.

Il modello di figura 7.1, nell'ipotesi di flusso di immigrazione trascurabile, fa prevedere una variazione esponenziale di $p(t)$. Se il saldo demografico è negativo (k_m maggiore di k_n), la popolazione diminuisce secondo una legge di dimezzamento a tempo costante, mentre nel caso più comune in cui k_n prevale su k_m, si ha un fenomeno di crescita esponenziale (a raddoppio costante) come illustrato nella figura 7.3. Una crescita di questo tipo non può essere sostenuta indefinitamente e, se si vuole studiare il fenomeno per periodi di tempo molto lunghi, bisogna perfezionare il modello introducendo leggi nonlineari.

Come esempio di modello nonlineare si può considerare quello in cui il coefficiente complessivo di crescita, dato da $k_n - k_m$, di una specie animale è legato alla differenza $r - p$ tra un valore di riferimento r, legato alle risorse dell'ambiente, e il valore p della popolazione nel momento considerato. In effetti la riduzione delle risorse pro capite, legata al ridursi della differenza $r - p$, porta a una diminu-

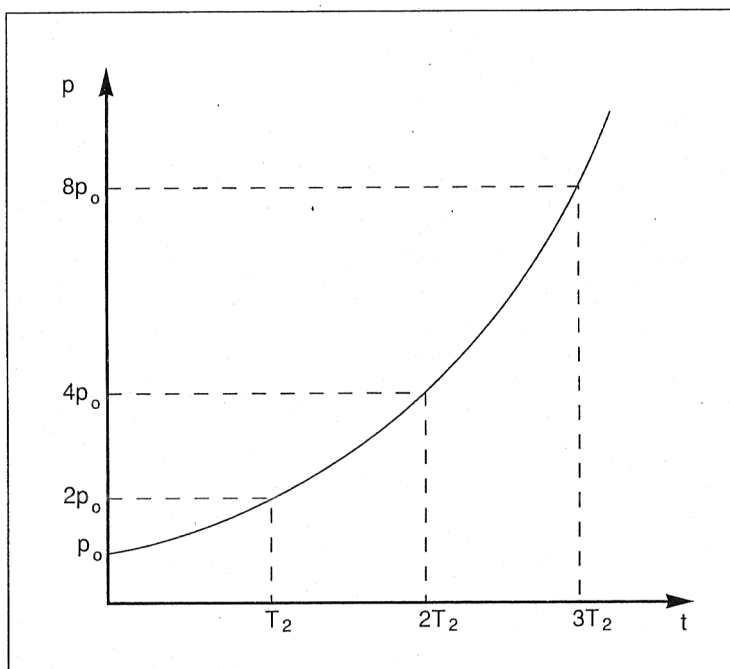



Fig. 7.3 Crescita esponenziale di una popolazione nel caso di flusso di immigrazione trascurabile e saldo demografico positivo.

zione del coefficiente di natalità e, soprattutto, a un aumento del coefficiente di mortalità. Il modello più semplice, in assenza di immigrazioni, è dunque del tipo:

$$dp/dt = [k(r - p)]p(t)$$

dove k è il coefficiente di proporzionalità fra il coefficiente di crescita globale ($k_n - k_m$) e la sovrabbondanza di risorse r rispetto ai fabbisogni della popolazione effettiva (e cioè $r - p$). In altre parole $k(r - p)$ svolge le funzioni che nel modello lineare erano svolte da $k_n - k_m$. All'equazione considerata corrisponde lo schema a blocchi di figura 7.4, in cui il blocco quadrato contrassegnato dal simbolo X rappresenta il prodotto delle due grandezze rappresentate

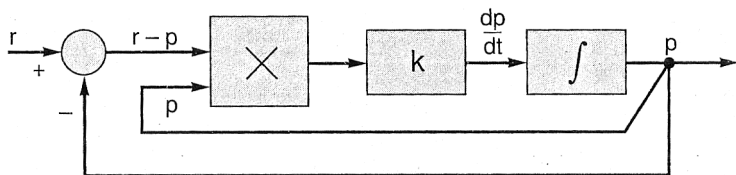



Fig. 7.4 Schema a blocchi per lo studio della dinamica di una popolazione (in assenza di immigrazione) secondo un modello non lineare semplice.

dalle frecce entranti. L'evoluzione del fenomeno, in questo caso, è rappresentata dalla caratteristica curva sigmoide rappresentata in figura 7.5. Per giustificare il suo andamento si possono fare le seguenti considerazioni. Partiamo da valori iniziali e da un valore della popolazione p piccoli rispetto a r, in modo da poter trascurare p rispetto a r, e cioè adottare l'approssimazione:

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = k\,r\,p$$

che equivale all'equazione lineare considerata prima se si

Fig. 7.5 Curva di crescita di una popolazione secondo il modello non lineare più semplice in assenza di immigrazione. La popolazione tende a un valore costante.

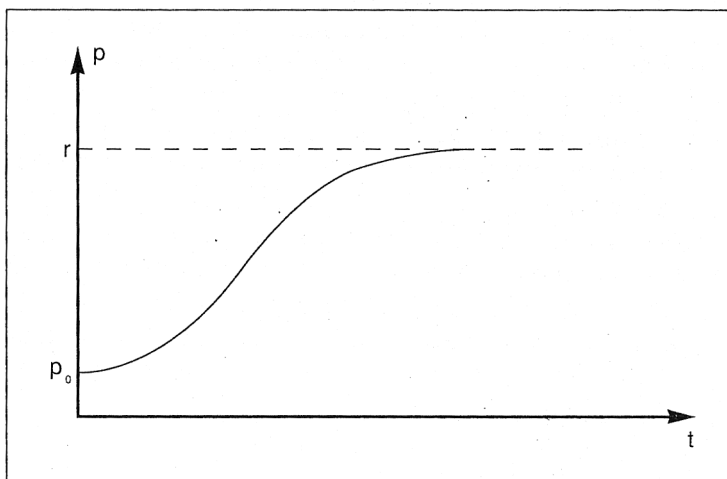
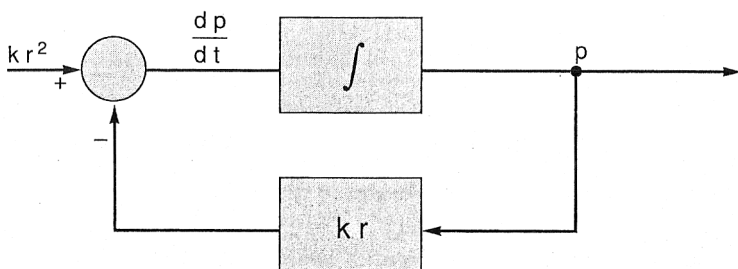



Fig. 7.6 Schema a blocchi semplificato per lo studio della dinamica di una popolazione secondo un modello non lineare nell'ipotesi che il valore della popolazione si approssimi al valore della capacità portante.

considera nullo r_i e si dà il valore $k\,r$ alla differenza $k_n - k_m$. A partire dalla condizione iniziale p_0 si ha quindi un'evoluzione che, per p piccoli, ha la forma esponenziale di figura 7.3, crescente con concavità rivolta verso l'alto.

Consideriamo ora il caso in cui p abbia valori molto vicini a r. In questo caso p, nel secondo membro, può essere sostituito con r, e l'equazione approssimata diventa:

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = k(r - p)\, r = kr^2 - krp$$

e lo schema a blocchi corrispondente ha la forma di figura 7.6. Se p, come si è supposto, è minore di r, la derivata di p continua a essere positiva, quindi p continua a crescere, ma poiché questa derivata diventa sempre più piccola, p cresce sempre più lentamente. Se p assumesse valori superiori a r, la derivata di p diminuirebbe; nell'uno e nell'altro caso si tende asintoticamente a r (che corrisponde quindi al valore di popolazione compatibile con le risorse disponibili, o *capacità portante*). La curva di figura 7.5 «raccorda» i due tratti ad andamento esponenziale crescente (per valori bassi di p) e ad andamento che tende asintoticamente a r, ciascuno dei quali può essere interpretato con un modello lineare semplificato.

Un'altra interessante classe di modelli a retroazione è quella che tratta l'interazione tra due specie, una di predatori e una di prede. Di un modello di questo tipo si darà qui innanzi tutto una approssimazione lineare, che già fornisce una prima giustificazione del fenomeno, e in seguito si illustrerà il modello classico di Volterra, più completo, che comprende però un elemento non lineare (un moltiplicatore).

Per il primo caso si considerino due popolazioni, p_1 e p_2, la prima di predatori e la seconda di prede, con l'ipotesi che la popolazione p_1 trovi le proprie fonti di sostentamento solo nella popolazione p_2 e che quest'ultima sia «predata» solo dalla popolazione p_1. Si faccia inoltre riferimento ai valori di *equilibrio reciproco* delle due popolazioni, p^*_1 e p^*_2, tali che, in assenza di perturbazioni, potrebbero conservarsi indefinitamente nel tempo. Allo stato di equilibrio i predatori sottraggono alla popolazione p_2 una quantità che, sommata alla mortalità naturale, compensa la natalità, determinando la costanza di p_2; simmetricamente, la popolazione predata fornisce alla popolazione p_1 risorse che la mantengono costante. Se la popolazione p_1 dei predatori aumenta oltre il valore p^*_1, il primo effetto immediato è la diminuzione della popolazione p_2 delle prede. In prima approssimazione si può supporre che la tendenza a diminuire di p_2 (cioè la sua derivata) sia proporzionale (tramite un coefficiente negativo) al valore di cui p_1 supera p^*_1. Si ha così l'equazione:

$$\mathrm{d}p_2/\mathrm{d}t = -k_1\,(p_1 - p^*_1) = k_1\,(p^*_1 - p_1)$$

Analogamente, se la popolazione p_2 aumenta oltre il valore p^*_2 di equilibrio, la popolazione predatrice, trovando maggiori risorse, tende ad aumentare. In ipotesi corrispondenti alle precedenti si ha così:

$$\mathrm{d}p_1/\mathrm{d}t = +k_2\,(p_2 - p^*_2) = -k_2\,(p^*_2 - p_2)$$

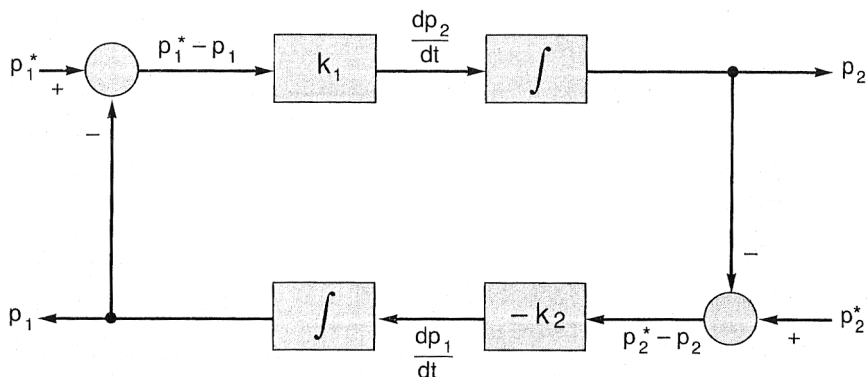



Fig. 7.7 Schema a blocchi del modello di interazione tra due popolazioni, rispettivamente di predatori e di prede.

Lo schema a blocchi che rappresenta queste due equazioni è illustrato nella figura 7.7. La derivata di una grandezza è legata alla grandezza stessa tramite un blocco che rappresenta un'azione integratrice, contrassegnato con il simbolo di integrale. Come si è già accennato nel primo capitolo, nel caso di due blocchi integratori che si retroazionano reciprocamente caratterizzati da coefficienti di proporzionalità di segno opposto (k_1 e $-k_2$), l'evoluzione del sistema è caratterizzata da andamenti oscillatorii di p_1 e di p_2 sfasati fra loro, come mostra la figura 7.8.

Il modello presentato è il più semplice e ha il pregio di essere lineare, e quindi di corrispondere a equazioni che possono essere risolte molto facilmente. L'ipotesi su cui si basa, tuttavia, è semplificata; per avere risultati più attendibili è opportuno tenere conto di ulteriori fattori. Un esempio di perfezionamento di questo modello è quello dovuto al matematico italiano Vito Volterra, che si basò sulle osservazioni sperimentali del biologo Umberto D'Ancona, suo genero. In questo modello si fa l'ipotesi che la tendenza a variare della popolazione p_2 delle prede, e cioè la sua derivata rispetto al tempo, sia espressa dalla somma di due fattori, uno positivo, del tipo k_n—k_m, pro-

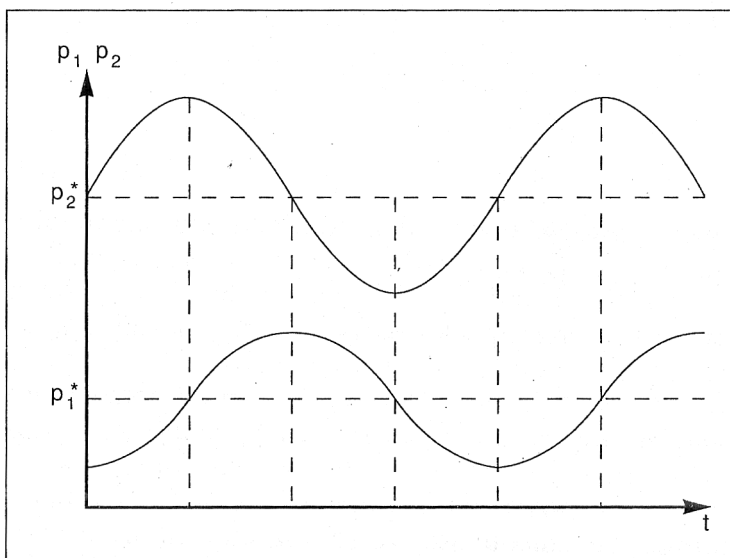



Fig. 7.8 Curve dell'andamento delle popolazioni di predatori e di prede. Entrambe oscillano attorno a una posizione di equilibrio, con uno sfasamento temporale tra le due curve.

porzionale (tramite un coefficiente k_2) alla consistenza della stessa popolazione e l'altro, negativo, proporzionale al prodotto di p_2 per p_1. Infatti la fine di una preda può avvenire per decesso naturale (del quale si tiene conto con k_m) o per cattura da parte di un predatore, e questa è tanto più probabile non solo quanto maggiore è il numero dei predatori ma anche quanto maggiore è il numero delle prede. Si ha così l'equazione:

$$\mathrm{d}p_2/\mathrm{d}t = k_2 p_2 - k_{21}\, p_1 p_2$$

che può anche essere scritta nella forma:

$$\mathrm{d}p_2/\mathrm{d}t = (k_n - k_m - k_{21} p_1)\, p_2$$

dove il primo addendo in parentesi esprime il coefficiente di natalità, il secondo quello di mortalità per cause natura-

li e il terzo quello di mortalità per cattura da parte di un predatore.

In modo analogo l'equazione differenziale relativa alla popolazione predatrice può esser scritta nella forma:

$$\mathrm{d}p_1/\mathrm{d}t = -k_1p_1 + k_{12}p_2p_1$$

In questo caso, in assenza di prede, il coefficiente di mortalità è superiore a quello di natalità, e pertanto si ha il segno negativo davanti al coefficiente k_1 mentre in presenza di prede si ha crescita della popolazione, e il termine corrispondente, a secondo membro, è positivo.

Il sistema delle due equazioni è rappresentato dallo schema a blocchi di figura 7.9 in cui si hanno due anelli, quello a retroazione negativa della popolazione p_1 e quello a retroazione positiva della popolazione p_2, che si influenzano reciprocamente attraverso il moltiplicatore e attraverso i due blocchi contrassegnati dai coefficienti k_{12} e k_{21}.

Anche questo modello nonlineare ammette una situazione di equilibrio, corrispondente al caso in cui le derivate delle due popolazioni sono entrambe nulle. Questa situazione si ha per $p_1 = k_2/k_{21}$ e per $p_2 = k_1/k_{12}$. In corrispondenza a questi valori la popolazione predata presenta un coefficiente di mortalità uguale al coefficiente di natalità, cosicché il coefficiente di crescita è nullo. Contemporaneamente la popolazione predatrice riceve dalla popolazione predata, a quel livello di equilibrio, nutrimento sufficiente perché il suo coefficiente di mortalità effettivo si attesti al valore del coefficiente di natalità.

Il modello non prevede però che il sistema tenda alla situazione di equilibrio, ma fa sì che esso vi compia attorno delle oscillazioni, dette cicli limite, che si differenziano da quelle previste dal modello lineare per due aspetti significativi. In primo luogo perché nel caso del sistema lineare le oscillazioni di regime permanente hanno un periodo determinato dai parametri del sistema ma una ampiezza che dipende dalle condizioni iniziali, mentre in questo caso

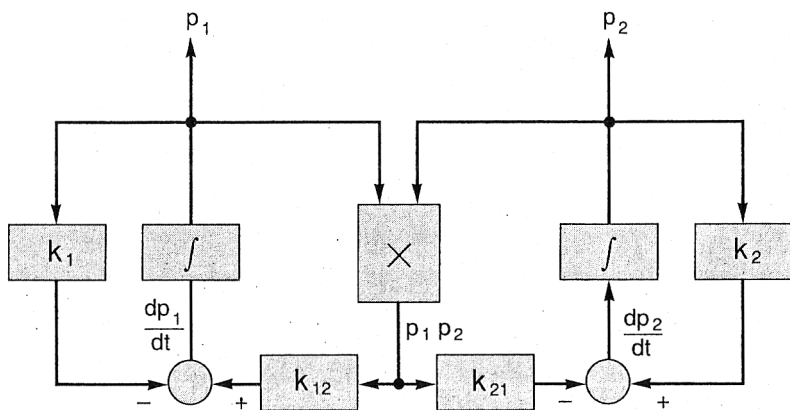



Fig. 7.9 Schema a blocchi del modello di Volterra per la variazione nel tempo di due popolazioni di predatori e di prede.

anche l'ampiezza delle oscillazioni è dovuta ai parametri interni del sistema. In secondo luogo, mentre nel caso del sistema lineare le oscillazioni sono perfettamente sinusoidali, nel modello di Volterra questo non è assolutamente garantito.

L'andamento ciclico sfasato delle popolazioni di predatori e di prede è stato riscontrato più volte in natura, e viene citato come una conferma della validità dei modelli considerati. Questo punto di vista tuttavia è contestato da alcuni studiosi, i quali ritengono di poter spiegare il fenomeno ricorrendo a fluttuazioni della popolazione delle prede che dipendono da fattori di altra natura. In ogni caso resta vivo l'interesse concettuale per i modelli considerati, che riescono a spiegare il fenomeno ricorrendo a pochi e semplici elementi.

7.3 *Le regolazioni dell'omeostasi*

Il termine *omeostasi* è stato coniato da W.B. Cannon attorno agli anni Trenta per indicare la capacità degli orga-

nismi viventi di conservarsi in condizioni di equilibrio stabile nonostante il variare delle condizioni esterne. Il titolo dell'opera in cui nel 1932 Cannon presentò i suoi studi è *Wisdom of the body*, che letteralmente significa «saggezza del corpo»: l'omeostasi è vista come lo strumento attraverso il quale si manifesta la saggezza della natura, capace di assicurare agli organismi le condizioni più opportune per la sopravvivenza. I primi studi di Cannon su questi temi erano relativi all'analisi delle basi fisiologiche della fame e della sete, alla regolazione ormonale del metabolismo, alla regolazione della temperatura interna (termoregolazione), al controllo neurologico della pressione sanguigna e del battito cardiaco e anche ad attività più complesse ma pur sempre automatiche del sistema nervoso riguardanti le reazioni di lotta e di fuga.

La saggezza della natura, per riprendere l'espressione di Cannon, si manifesta in generale nel garantire il risultato voluto adottando più strumenti diversi contemporaneamente, in modo da poter raggiungere lo scopo anche quando uno o più di uno dei meccanismi preposti non dovessero funzionare. Un esempio significativo possiamo trovarlo nella regolazione della temperatura corporea negli animali a sangue caldo. Nell'uomo questa temperatura è conservata intorno ai 37 °C, ed essa deve rimanere tale nonostante la variabilità della produzione interna di calore e delle condizioni di temperatura, umidità e ventilazione dell'ambiente esterno. Queste cause, in assenza di controllo, darebbero luogo a variazioni molto cospicue della temperatura interna che, invece, grazie all'omeostasi, nello stato normale non si manifestano (lo stato febbrile è generalmente conseguenza di una reazione dell'organismo a cause diverse, tanto da farlo considerare il sintomo di una situazione patologica). Per mantenere costante la temperatura interna l'organismo può intervenire in diversi modi: variando la produzione interna di calore (che nei casi estremi può dar luogo a quelle forme di agitazione muscolare che si manifestano nei brividi), variando l'intensità

della circolazione superficiale (con azioni vasocostrittrici o vasodilatatorie sui capillari che irrorano gli strati superficiali del corpo), modificando i fenomeni di evaporazione (traspirazione, sudorazione ecc.), e infine, negli animali dotati di pelliccia o di piume, aumentando lo strato isolante (il fenomeno dell'orripilazione, la cosiddetta *pelle d'oca*, che nell'uomo è un residuo atavico, non più efficace allo scopo, fa raddrizzare i peli attraverso la formazione di numerosi minuscoli rilievi conici sulla pelle in corrispondenza dei follicoli piliferi). All'omeostasi quindi corrispondono più tecniche diverse, che concorrono al raggiungimento di un fine comune, talora secondo un'opportuna gerarchia di interventi, talaltra senza, sempre con la possibilità di giovarsi di meccanismi alternativi in caso di insufficienza di quelli primari.

Non tutti questi meccanismi sono regolazioni a retroazione (si riscontrano anche tecniche di controllo «in avanti» o, come si dice in inglese, *feedforward*). La retroazione comunque rimane uno dei meccanismi più significativi; generalmente si hanno più anelli di retroazione interlacciati e interagenti, e le relazioni che ne descrivono il comportamento sono quasi sempre non lineari. Ciò non esclude l'interesse teorico per modelli semplificati, con un solo anello di retroazione e con leggi di comportamento linearizzate. Su questa linea si è mossa molta della ricerca cibernetica alla quale si accennerà nel capitolo ottavo.

Il modello della retroazione vale anche per fenomeni diversi da quelli più propriamente di regolazione omeostatica, in cui si tiene sotto controllo un parametro dell'ambiente interno. Per esempio controlli di posizione di parti mobili del nostro corpo che vengono effettuati mediante un meccanismo a retroazione, basato cioè sul confronto fra il risultato fino a quel momento ottenuto e quello che si desidera conseguire. Anche in questo caso si hanno, generalmente, più controlli cooperanti. Prendiamo per esempio il caso del complesso di azioni che il corpo deve eseguire per prendere in mano un oggetto. Quando si af-

ferra un oggetto si hanno due tipi di retroazione, una visiva, che ci rende consapevoli della distanza della mano dall'oggetto e una propriocettiva. La segnalazione in quest'ultimo caso viene dai propriocettori, che informano i centri nervosi superiori della posizione del corpo e delle sue parti. Questi ultimi intervengono, del resto, anche in molte altre forme di regolazione; per esempio in quelle necessarie per la conservazione della posizione eretta nell'uomo. Il baricentro umano è posto molto in alto rispetto alle modeste dimensioni del poligono d'appoggio (costituito dal cosiddetto «involucro convesso» delle piante dei piedi) e infatti non è facile mantenere una statua in posizione eretta senza dotarla di un basamento o di altre strutture d'appoggio. Nell'uomo la posizione eretta è il risultato «dinamico» di una correzione continua, ogni qual volta la proiezione del baricentro si allontana da una posizione sufficientemente centrale rispetto al poligono d'appoggio.

Ancora più articolato è il complesso delle azioni di controllo messe in gioco quando si insegue con lo sguardo un oggetto in movimento, e si può avere un movimento «controllato» dell'intero corpo, del capo rispetto al corpo, degli occhi rispetto al capo e, contemporaneamente, si ha anche il controllo della messa a fuoco dell'immagine e dell'apertura della pupilla (in rapporto alla variazione di luminosità).

Un sistema di controllo biologico, per esempio un processo omeostatico, ha, nella sua versione più elementare, lo schema di retroazione di figura 1.6, lo stesso schema relativo ai sistemi di controllo utilizzati nella tecnica. In questo schema r rappresenta la grandezza di riferimento alla quale si vuole adeguare la grandezza controllata c, che costituisce l'uscita del processo P da controllare. Per fare ciò si confronta c con r e si utilizza l'errore $e = r - c$ per elaborare, tramite il controllore C, m, la grandezza «manipolata» che, applicata a P tende a farne variare l'uscita c in modo da adeguarla a r. L'efficacia dell'azione di controllo dipende dal controllore. Se r è costante si parla, generalmen-

te, di *regolazione* (a valore fisso), se è variabile si parla di *controllo a programma* o di *inseguimento*.

Il problema essenziale in un sistema di regolazione, è quello del segnale di riferimento r che, se è costante, costituisce la condizione preliminare per la possibilità di conservare costante (o pressoché tale) la grandezza controllata. Nella maggior parte dei sistemi di controllo biologici questo riferimento per l'uscita controllata non si manifesta sotto forma di un vero e proprio segnale fisico. Si ha invece una situazione in cui la grandezza controllata dà luogo, attraverso distinti meccanismi, a due diversi effetti p e q che, a loro volta, influenzano in modo opposto la c: può trattarsi, per esempio, di due flussi materiali (una portata affluente e una portata defluente che tendono a far variare in modo opposto il volume o la concentrazione di una determinata sostanza, o altri analoghi parametri), oppure di una forza motrice e di una forza resistente, o di una potenza generata e di una potenza assorbita e così via. Per analizzare il fenomeno si potrà costruire un diagramma come quello di figura 7.10 in cui le due curve disegnate rappresentano il legame fra il valore di c in ascissa e i valori di p e di q, in ordinata. Nella figura si fa riferimento al caso in cui le due curve si intersecano in un punto, in corrispondenza al valore c_r. Questo punto è un punto di equilibrio poiché se $c = c_r$ si ha $p = q$ e quindi l'azione esercitata da p su c compensa esattamente quella, opposta, esercitata da q. Limitandoci all'analisi di piccole variazioni intorno a c_r e quindi «linearizzando» il comportamento del sistema intorno a quel punto (cioè sostituendo le curve della figura 7.10 con le loro tangenti nel punto di intersezione) si ha che la «causa» complessivamente agente su c, e cioè la differenza fra q e p, è proporzionale alla differenza $c_r - c$ secondo un coefficiente che dipende dalla pendenza delle due tangenti. Tutto quindi avviene come se esistesse «fisicamente» un segnale c_r costante al quale viene confrontato c, dando luogo a un errore $e = c_r - c$ che, opportunamente amplificato, agisce su c attraverso una catena di azioni

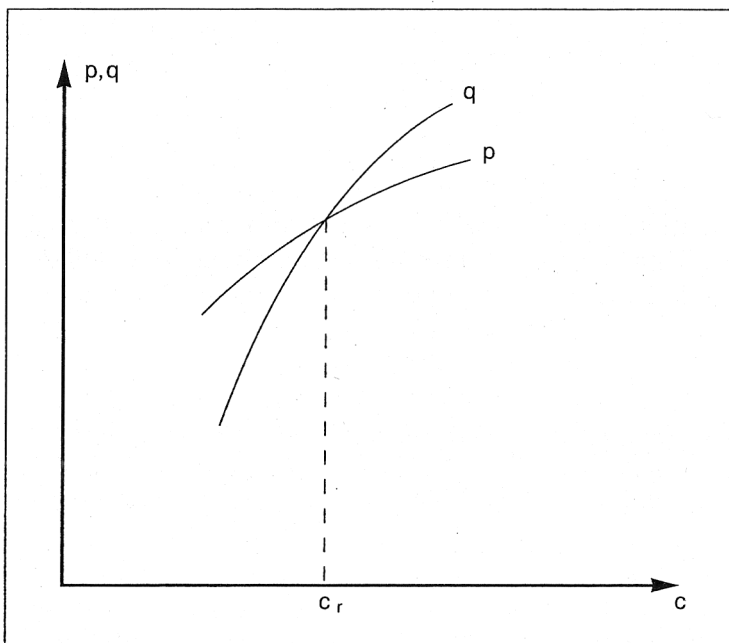



Fig. 7.10 Rappresentazione grafica del meccanismo fondamentale di molte regolazioni biologiche. Nel diagramma si ha in ascissa la grandezza da controllare (*c*) e in ordinata i due processi (*p* e *q*); il punto di intersezione delle due curve rappresenta il punto di equilibrio.

(che includono il processo controllato *P* di figura 1.6) caratterizzate da una loro propria dinamica. La costanza di c_r è legata al fatto che rimanga (pressoché) costante l'ascissa del punto di intersezione delle due curve nonostante variazioni delle condizioni ambientali, interne o esterne. Si noti che questa circostanza non è così restrittiva come sarebbe quella che le due curve considerate non si modificassero; infatti le due curve possono essere moltiplicate per uno stesso fattore o spostate verso l'alto (o verso il basso) di una stessa quantità senza che ciò sposti l'ascissa della loro intersezione.

Ciò premesso, per illustrare un sistema di controllo bio-

logico ci si riferirà a una versione semplificata del meccanismo di regolazione della concentrazione di glucosio nel sangue (glicemia) che verrà indicato con la funzione del tempo $g(t)$. Questa concentrazione varia in modo tale che la sua derivata sia espressa dalla somma algebrica dell'*apporto esogeno* $u_g(t)$, derivante dall'assunzione di zuccheri, dell'*afflusso endogeno* $f_i(t)$, dovuto alla produzione di glucosio da parte del fegato, e del *deflusso* $f_0(t)$, che corrisponde ai fenomeni di utilizzazione del glucosio e alla sua trasformazione in altre sostanze. Si ha così:

$$\mathrm{d}g/\mathrm{d}t = u_g(t) + f_i(t) - f_0(t)$$

I flussi $f_i(t)$ e $f_0(t)$ dipendono sia dal livello di glicemia $g(t)$ (secondo una legge non lineare), sia del livello $i(t)$ dell'insulina nel sangue. L'insulina è un ormone secreto delle cosiddette *isole di Langerhans*, nel pancreas, in risposta all'iperglicemia (che corrisponde a valori di g superiori a quelli di riferimento).

Anche per la derivata di $i(t)$ si può dare un'espressione dinamica analoga a quella data per $g(t)$: la variazione dell'insulina è data dalla differenza tra il flusso $h_i(t)$ e il «deflusso» $h_0(t)$ dell'insulina prodotta. Si ha così:

$$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = h_i(t) - h_0(t)$$

In prima approssimazione si può supporre che h_i dipenda soltanto da g e che h_0 dipenda soltanto da i. Sperimentalmente però è noto che l'insulina viene prodotta in misura tanto maggiore quanto più è elevato il livello di $g(t)$ e quanto più questo tende a crescere, cioè quanto maggiore è la sua derivata $\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$.

Il modello matematico del sistema sarà formato dalle due equazioni sopra riportate, che esprimono le derivate di $g(t)$ e di $i(t)$, nonché dalle equazioni che rappresentino in modo opportuno la dipendenza di f_i, f_0, h_i e h_0 da $g(t)$, da $i(t)$ e da $\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$. Con queste equazioni il modello è un mo-

dello a retroazione con più anelli di retroazione interlacciati.

Cerchiamo ora le dipendenze cui abbiamo accennato: f_i diminuisce all'aumentare di g e all'aumentare di i. Infatti l'afflusso endogeno di glucosio al sangue è più elevato se nel sangue c'è una minore concentrazione di glucosio, ma tale afflusso viene ridotto per effetto dell'insulina. Se g^* è il livello di equilibrio del glucosio che si verifica per $f_i = f_0$ e i^* è il valore di equilibrio dell'insulina, la funzione $f_i(g,i)$ può essere approssimata nell'intorno di g^* e i^* con l'espressione lineare:

$$f_i(g,i) = a_0 - a_1\,(g - g^*) + b_0 - b_1\,(i - i^*)$$

dove i coefficienti a_0, a_1, b_0 e b_1 sono positivi. Il deflusso di glucosio del sangue f_0 invece cresce al crescere del glucosio e al crescere dell'insulina, quindi, adottando una linearizzazione analoga all'esempio precedente si ha:

$$f_0\,(g,i) = c_0 + c_1\,(g - g^*) + d_0 + d_1\,(i - i^*)$$

dove i coefficienti c_0, c_1, d_0 e d_1 sono anch'essi positivi. Si dovrà avere, inoltre, $a_0 + b_0 = c_0 + d_0$ in modo che valga $f_i\,(g^*, i^*) = f_0\,(g^*, i^*)$, coerentemente con l'ipotesi secondo la quale il sistema è in equilibrio quando $g = g^*$ e $i = i^*$.

Procedendo analogamente per h_0 e h_i si ha:

$$h_i\,(g,\mathrm{d}g/\mathrm{d}t) = e_0 + e_1\,(g - g^*) + e_2\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$$
$$h_0\,(i) = m_0 + m_1\,(i - i^*)$$

in cui i coefficienti e_0, e_1, e_2, m_0 e m_1 sono positivi. Affinché il deflusso di insulina all'equilibrio, $h_0(i^*)$, compensi il corrispondente afflusso $h_i\,(g^*, C)$, deve valere $e_0 = m_0$.

Il modello può essere rappresentato attraverso lo schema a blocchi della figura 7.11, dove si sono indicati con il simbolo k, corredato di opportuni pedici, delle costanti che riassumono i coefficienti che compaiono nelle equa-

zioni. All'interno del blocco contrassegnato con la lettera P sono raccolte le operazioni che riguardano la dinamica del glucosio, che è il processo da controllare. La parte che corrisponde al controllore è invece racchiusa nel blocco contraddistinto dalla lettera C. Tramite il blocco k_{gg}, g^* esercita un'azione diretta su P, che corrisponde a una catena (aperta) di controllo (*feedfoward*). A questa azione di controllo se ne combina un'altra, esercitata mediante una catena di retroazione, nella quale si confronta g con g^*, si ricava l'errore $g^* - g$ e si forma una combinazione dell'errore e della sua derivata, in modo che l'azione di controllo sia tanto più intensa quanto più grande è l'errore e quanto più velocemente cresce. Questa azione combinata si esercita sull'insulina, attraverso un'altra catena chiusa in cui i è confrontata a i^*, e la differenza $i^* - i$ esercita tramite il blocco k_{gi}, l'azione di controllo sul «processo» la cui uscita è g, tendendo ad adeguare g a g^*. Attraverso questo schema risulta chiaro che g dipende da tre ingressi: g^*, i^* e u_g. Ricordiamo però che g^* e i^* non sono veri e propri segnali di riferimento, ma valori di equilibrio legati alle ascisse delle intersezioni di caratteristiche statiche, mentre u_g è una vera e propria grandezza fisica, che corrisponde al passaggio diretto nel sangue di una certa quantità di glucosio a seguito dell'assunzione orale di zuccheri o di altri carboidrati. Molto spesso, e tipicamente nell'assunzione di liquidi zuccherini, $u_g(t)$ è un «segnale» molto intenso ma di breve durata; il livello di g conseguente a questo «impulso» presenta un andamento nel tempo che si discosta apprezzabilmente da g^* per ritornare poi asintoticamente a tale valore (almeno nelle persone non affette da malattie quali il diabete). L'entità del picco di tale «risposta» del sistema allo «stimolo» subito e la durata del suo tempo di assestamento (cioè del tempo necessario perché g ritorni al valore g^*) sono utilizzabili come validi elementi diagnostici, poiché vari disturbi del metabolismo si traducono in un rallentamento di questi meccanismi.

Il tipo di modellizzazione del controllo della glicemia

g
P
u_g
k_{gg}
∫
C
k_{gi}
i^*
$-i$
$i^* - i$
∫
k_{ii}
$k_p + k_d \frac{d}{dt}$
$g^* - g$
k_{gg}
g^*

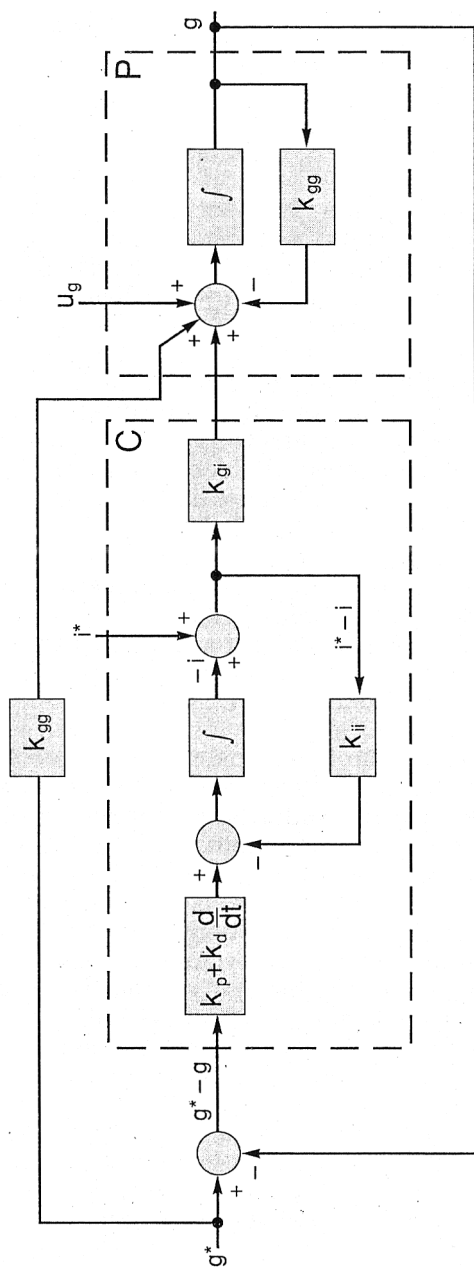



Fig. 7.11 Schema a blocchi del meccanismo di regolazione del glucosio nel sangue. All'interno del riquadro *P* sono racchiuse le operazioni che riguardano la dinamica della grandezza da controllare; all'interno del riquadro *C* sono schematizzate le operazioni eseguite dal sistema di controllo.

che si è illustrato (tanto più se perfezionato tenendo conto delle intrinseche nonlinearità) può essere utilizzato, quindi, a fini diagnostici ma si presta anche a fornire suggerimenti per la realizzazione di protesi e, in particolare, per la costruzione e il corretto impiego del pancreas artificiale.

Nel caso di forme gravi di diabete le beta-cellule del pancreas non secernono insulina, il che corrisponde a un flusso h_i praticamente nullo: in questi casi è gravemente compromessa l'efficienza del meccanismo di regolazione della glicemia. A questo inconveniente si può ovviare con l'assunzione di farmaci che introducono per via esogena l'insulina necessaria, ma non sempre è facile attribuire al livello di insulina l'andamento desiderato, così nei casi di necessità (per esempio durante interventi chirurgici) si ricorre al pancreas artificiale. Questo è costituto da un apparato che, dopo avere accertato il livello di glicemia nel paziente, applica una legge di controllo il più possibile simile a quella che regola la glicemia negli individui sani e manovra una pompa che regola il flusso di insulina da iniettare nell'organismo.

8. Retroazione e cibernetica

8.1 *Wiener e la cibernetica*

La parola moderna cibernetica deriva dal greco *kybernetiké*, che significa arte del pilotare, del guidare, soprattutto riferita alle navi. La parola è entrata nella lingua con il significato che oggi, più o meno universalmente, le viene riconosciuto, grazie a Norbert Wiener, che nel 1948 con il suo libro *Cybernetics, control and communication in the animal and in the machine* (La cibernetica, ovvero il controllo e la comunicazione nell'animale e nella macchina) pose le basi di questa scienza.

L'uso moderno del termine ha però un precedente: la parola fu usata già nel 1834 dal noto fisico e matematico André Marie Ampère. Norbert Wiener, nel coniare la parola cibernetica non sembra avesse presente l'impiego che ne aveva già fatto Ampère. Secondo Wiener la cibernetica aveva come obiettivo lo studio, condotto da un punto di vista interdisciplinare e unitario, dei processi riguardanti la trasmissione di informazioni nelle macchine e negli organismi viventi e in particolare le azioni di controllo dei sistemi naturali e di quelli artificiali. La parola scelta da Wiener doveva essere un omaggio a James Clerk Maxwell, che, come si è ricordato nel secondo capitolo, nel 1868 aveva presentato alla Royal Society una nota intitolata *On governors* (il termine latino corrispondente al greco *kybernetes* è appunto *gubernator*), considerata abitualmente come il primo importante contributo alla teoria del controllo automatico.

8.1 André Marie Ampère

Il termine *cybernétique* come nome di una disciplina scientifica è stato introdotto da André Marie Ampère nel saggio *Essai sur la philosophie des sciences* pubblicato nel 1834. In questo saggio Ampère propone, attraverso un criterio dicotomico, una rigorosa classificazione delle scienze. Le scienze vengono anzitutto divise in due grandi regni: le scienze cosmologiche, o della natura, e le scienze noologiche, o dello spirito. Ciascuna viene a sua volta divisa in due sottoregni, e ciascun sottoregno in due discipline. Si perviene così a otto branche scientifiche, ognuna delle quali viene ancora una volta suddivisa in due settori, e ciascuno dei 16 settori dà luogo a due vere e proprie scienze autonome, dette scienze del primo ordine. Queste 32 scienze, continuando ad applicare il principio dicotomico, danno luogo a 64 scienze del secondo ordine e queste a 128 scienze del terzo ordine. Il numero complessivo delle singole scienze è, infine, 224.
La costruzione di Ampère porta, come si può facilmente immaginare, a una suddivisione dello scibile diversa da quella cui l'evoluzione storica delle singole discipline aveva condotto, e a una arbitraria articolazione in scienze distinte di materie che tradizionalmente erano considerate unitarie (per esempio l'area dell'astronomia matematica viene artificiosamente suddivisa in uranografia, eliostatica e astronomia). Per questo motivo spesso Ampère fu costretto a coniare nuovi termini per indicare discipline di fatto non esistenti, oppure branche di discipline esistenti alle quali voleva attribuire un nome specifico considerandole scienze autonome. La maggior parte delle nuove proposte di Ampère non ha avuto però molta fortuna, e le parole da lui suggerite non sono state poi utilizzate.
Più fortuna ha avuto invece il termine cibernetica, che, nella visione di Ampère, era inserita fra le scienze politiche come una scienza del terzo ordine. Più precisamente, insieme alla Teoria del potere, era una sezione della Politica, scienza del secondo ordine. I motivi che hanno portato Ampère a usare il termine cibernetica per indicare una scienza del comando sono molto più semplici da immaginare (visto il significato originale della parola) rispetto a quelli che hanno portato gli studiosi successivi a darle il significato che ha oggi.

Norbert Wiener, nato nel 1894 e morto nel 1964, fu uno studioso di larghi interessi. Di formazione matematico (la sua autobiografia si intitola *Io sono un matematico*), dette parecchi e interessanti contributi allo studio delle serie temporali e dell'integrale di Fourier e delle loro applicazioni, in particolare nel campo delle comunicazioni elettriche. Il suo nome, tuttavia, è legato soprattutto alla cibernetica.

Una grande importanza nella formazione di Wiener ebbero i programmi di ricerca interdisciplinare determinati dalle esigenze belliche ai quali egli aveva partecipato nei primi anni Quaranta, nonché il lungo sodalizio con vari studiosi di larghi interessi. Wiener si accorse presto nella sua attività di scienziato che le collaborazioni che aveva, anche se miranti a obiettivi specifici, difficilmente si inquadravano nell'ambito di una singola scienza. Questo, e più ancora i continui contatti con studiosi di formazione diversa, portarono Wiener a meditare sui temi della interdisciplinarità. Egli osservava che, dopo Leibniz nessuno scienziato era più stato in grado di padroneggiare tutto il sapere elaborato dall'attività intellettuale del suo tempo, e anzi che non vi erano più neppure studiosi capaci di operare in tutte le aree di una sola scienza, la matematica, la fisica o la biologia. La tendenza degli studiosi era quella di specializzarsi in settori sempre più ristretti, ciascuno dei quali è destinato a espandersi in direzioni sempre più lontane dalla disciplina di provenienza. In queste nuove aree nasce l'interdisciplinarità.

La cibernetica, nella concezione di Wiener, è una specie di territorio dell'Oregon, nella stessa situazione in cui questo si trovava a cavallo tra i sec. XVIII e XIX, quando vi si scontrarono gli spagnoli, provenienti dalla California, i russi, che scendevano dall'Alaska, gli inglesi dal Canada e gli statunitensi.

Anziché lo scontro e la colonizzazione esclusiva, per la cibernetica Wiener però auspicava un fertile incontro di collaborazione tra matematici, biologi, fisici e ingegneri. Il

primo contributo lo diede lui stesso con la pubblicazione del suo libro nel 1948, la cui traduzione italiana apparve nel 1953. Nello stesso 1953 uscì anche, con il titolo *Introduzione alla cibernetica*, la traduzione di un altro suo volume del 1950, il cui titolo originale era *The human use of human beings*, che letteralmente significa «l'uso umano degli esseri umani». La traduzione italiana include i primi undici capitoli dell'originale ma non il dodicesimo (*Voices of rigidity*, Voci di intransigenza), polemico nei riguardi sia della Chiesa cattolica sia dei regimi comunisti; tuttavia questo episodio di censura non ebbe l'eco che poi fu data negli stessi anni a un analogo episodio relativo a una edizione del testo di Adorno, *Minima moralia*, a ulteriore testimonianza del persistere del divorzio fra le «due culture» in Italia.

Obiettivo principale della cibernetica è, come si è detto, lo studio del parallelismo fra macchine e organismi viventi, con particolare attenzione ai processi di generazione, trasmissione e utilizzazione dell'informazione e a quelli di regolazione e di controllo. L'ipotesi di base era che vi fosse una sostanziale analogia fra i processi di regolazione che avvengono nelle macchine e quelli che hanno luogo negli esseri viventi e del ruolo fondamentale svolto in entrambi dall'informazione. Si tratta di un'ipotesi facilmente collegabile alla linea di pensiero, di orientamento riduzionistico, secondo la quale i fenomeni della vita erano studiati cercando di ricondurli anzitutto ai loro aspetti meccanici, poi a quelli chimici, a quelli delle trasformazioni energetiche, e infine a quelli legati ai fenomeni elettrici.

Nella prefazione alla seconda edizione di *Cybernetics* Wiener stesso scriveva che, se una disciplina scientifica è intrinsecamente vitale, il nucleo centrale dei suoi interessi può e deve subire modifiche. E se queste ultime devono essere considerate sintomo di vitalità, allora la cibernetica è vitalissima: infatti, ad appena un quarto di secolo dalla sua apparizione, H. Drischel ha raccolto e commentato più di cento definizioni della cibernetica date a partire dal

1948, che riflettono l'evoluzione in fatto di individuazione dei problemi tipici di questa disciplina.

In proposito si può considerare anzitutto il contributo del neurologo inglese William Ross Ashby, che è considerato, accanto a Wiener, uno dei fondatori di questa scienza. Secondo Ashby la cibernetica è «una teoria generale astratta dei meccanismi», cioè una teoria mirante alla rappresentazione matematica delle varie forme di comportamento e di funzionamento di un sistema. Adotta così un punto di vista molto vicino a quello della teoria generale dei sistemi di Ludwig von Bertalanffy, di cui si dirà nel prossimo paragrafo.

Fin dai primissimi anni successivi alla pubblicazione del libro di Wiener, vari studiosi francesi, fra i quali il matematico Louis Couffignal e un altro dei padri della cibernetica, Dennis Gabor (che più tardi otterrà un premio Nobel per i suoi studi sull'olografia), consideravano la cibernetica come la scienza avente per oggetto le attività dirette al conseguimento di un fine.

Altri la concepivano come lo studio dei sistemi complessi e altamente organizzati, da condurre in termini quanto più possibile generali e astratti, prescindendo dalla natura fisica delle grandezze che ne caratterizzano il comportamento.

In Italia Silvio Ceccato ha sostenuto un'interpretazione della cibernetica come scienza generale del linguaggio, particolarmente attenta a problemi come quello degli universali, che è stato oggetto di analisi filosofiche in un passato anche lontano, o come quello della Gestalt, formulato nell'ambito delle ricerche psicologiche della fine del secolo scorso.

Limitandoci alle concezioni della cibernetica che meno si scostano da quella originale di Wiener, oggi generalmente si accetta di collegare alla cibernetica non solo i problemi connessi alla trasmissione di informazioni, ma anche e soprattutto quelli di elaborazione delle informazioni, legati allo sviluppo dei calcolatori elettronici.

Una definizione che, seguendo la falsariga di quella originale di Wiener, compendia molti dei punti di vista accennati, è stata proposta di recente da R. Trappl; egli ritiene che la cibernetica non sia solo una scienza, ma che abbia anche proiezioni applicative, e che si debba occupare non solo di comunicazioni e di controllo (come già diceva Wiener), ma anche di elaborazione di informazioni, non solo con riferimento alle macchine e agli esseri viventi ma anche a ogni altra struttura, incluse quelle sociali, in cui si possa parlare di organizzazione.

Se si attenua il richiamo accentratore dell'impostazione unitaria e interdisciplinare si può avere anzitutto la tendenza, largamente seguita anche in Italia, a interpretare la cibernetica soprattutto come *biocibernetica*. A proposito dei rapporti tra cibernetica e bionica V. Somenzi propone di interpretare la cibernetica come la scienza «che si occupa dei fenomeni biologici ai fini di una loro interpretazione in termini di processi fisico-chimici e di una loro teorizzazione matematica» e la bionica come la scienza che mira «all'effettiva costruzione di nuovi automi — non ancora previsti dai tecnici o dai matematici — sulla base di quanto è dato osservare negli organismi viventi».

A queste interpretazioni si affiancano però anche quelle che concepiscono la cibernetica come teoria dell'informazione (e non solo per gli aspetti che riguardano prevalentemente l'intelligenza artificiale) o, ancora, che vedono il nucleo centrale della cibernetica — conformemente all'etimologia — nella problematica del controllo.

Questa varietà di interpretazioni è forse una delle cause del fatto che gli studiosi e il pubblico hanno assunto atteggiamenti alquanto diversificati nei riguardi della cibernetica, e anche di talune «oscillazioni del gusto» che si sono tradotte nell'alternanza di posizioni favorevoli o contrarie, ben disposte o sospettose, fiduciose o scettiche.

È noto come l'opera di Wiener abbia suscitato alla sua uscita notevoli entusiasmi. In seguito si è avuto, nei paesi occidentali, un raffreddamento che ha persino portato, in

taluni casi, quasi a un discredito del termine, dovuto all'impressione che si stesse dedicando un eccessivo interesse a problemi «filosofici» (nel senso deteriore e dilettantesco del termine), affrontandoli con molta leggerezza. L'attenzione del grande pubblico in quel primo periodo inoltre era più rivolta verso i divulgatori di tale scienza che verso i cibernetici veri e propri, poiché erano i primi che, nell'entusiasmo, l'avevano resa nota, ma spesso le loro posizioni, non essendo rigorose come quelle degli scienziati, contribuivano al disordine creatosi intorno a questa disciplina. Su queste alterne fortune non è stato privo di effetto il successo che il termine ha avuto nella fantascienza.

In Europa orientale la cibernetica è stata all'inizio considerata con molto sospetto, anche in rapporto alle posizioni culturali, ideologiche e politiche di Wiener, spesso in esplicita polemica con i regimi totalitari. Per questo stesso motivo, però, la cibernetica si veniva ammantando del fascino delle cose proibite, che contribuì non poco, nella fase di destalinizzazione dei primi anni Sessanta, a suscitare entusiasmi, talvolta eccessivi, ai quali ha fatto seguito un certo raffreddamento.

8.2 *Bertalanffy e la teoria generale dei sistemi*

Obiettivi e interessi vicini a quelli della cibernetica, almeno dal punto di vista che qui ci interessa, presenta la teoria generale dei sistemi, o teoria dei sistemi di tipo generale (*General system theory*), legata a Ludwig von Bertalanffy.

Bertalanffy è nato nei pressi di Vienna nel 1901. Ha studiato all'Università di Vienna e in seguito vi ha svolto attività di ricerca e di insegnamento fino al 1948, quando si è trasferito in Canada e poi negli Stati Uniti. Si è formato, anche in senso filosofico, nell'area del *Circolo di Vienna* e sono stati soprattutto importanti i suoi rapporti con il filosofo neopositivista tedesco Hans Reichenbach.

Bertalanffy è un biologo, e a problemi biologici dedica la prima parte della sua attività. Nel 1928 pubblica il testo *Kritische Theorie der Formbildung* (Teoria critica della morfogenesi), in cui, pur non aderendo al vitalismo, polemizza con il meccanicismo biologico e con le sue schematizzazioni più astratte. Nel 1932 pubblica il primo volume della *Theoretische Biologie* (Biologia teorica), in cui, con maggiore maturità, chiarisce il programma dell'organicismo.

Tra le insufficienze del meccanicismo egli considera quella di voler ridurre l'indagine scientifica in biologia al solo studio di proprietà «sommabili». La trattazione «sommativa» può dare buoni risultati nello studio di «complessità non organizzate» (come per esempio un gas, composto di un numero elevatissimo di molecole, che soddisfa le leggi termodinamiche deducibili dalle leggi elementari della meccanica applicate alle singole molecole). Ma tale impostazione non è più adeguata per le «complessità organizzate», in cui entrano in gioco, accanto alle proprietà sommabili, anche le proprietà «costitutive», che si spiegano con le relazioni fra le parti e i processi singoli.

In una complessità organizzata, secondo Bertalanffy, il tutto è più della somma delle parti, e in particolare egli dice che il comportamento di un sistema (inteso come un complesso di elementi interagenti) è spiegabile mediante il comportamento delle parti che lo compongono e delle relazioni che intercorrono fra loro.

Un contributo significativo di Bertalanffy allo studio delle discipline biologiche è stato dato negli anni Quaranta con la concezione dell'organismo biologico come un *sistema aperto*, cioè come un sistema nel quale si hanno scambi di materia e di energia con l'ambiente. In questo modo si può quindi avere una diminuzione di entropia (con il passaggio verso stati più complessi e organizzazioni più articolate) all'interno del sistema, anche se nel complesso sistema/ambiente l'entropia aumenta, in conformità con la seconda legge della termodinamica. I sistemi

inoltre tendono ad assumere uno stesso stato quasi stazionario indipendentemente dallo stato di partenza (*equifinalità*).

Verso gli anni Cinquanta Bertalanffy comincia a dedicarsi soprattutto alla teoria generale dei sistemi. In questo quadro di interessi, nel 1954 fonda la *Society for General Systems Research* con il biomatematico Anatol Rapoport, il fisiologo Ralph G. Gerard e l'economista Kenneth Edward Boulding. Organo di tale associazione è l'annuario «General Systems», dove sono apparsi molti dei contributi più significativi degli studiosi di questo orientamento.

Nel 1968 Bertalanffy pubblica il volume *General system theory, foundation, development, applications* (Teoria generale dei sistemi, fondamenti, sviluppi e applicazioni), in cui l'oggetto dei suoi interessi non è più solo la biologia, bensì un vasto quadrante di interessi che spaziano dalla biologia alla «culturologia», alla chimica fisica, alla fisica, alla filosofia, alla psichiatria e alla sociologia. Nonostante il perdurare dell'atteggiamento polemico nei riguardi del meccanicismo, la fisica svolge un ruolo determinante nella modellizzazione dei vari tipi di sistemi e, comunque, il solo linguaggio che si deve tendere ad applicare è quello logico-matematico (tanto che a taluni la impostazione di Bertalanffy è venuta a sembrare, in sostanza, un'estensione del meccanicismo).

8.3 *Maturana e Varela e l'autopoiesi*

Un altro campo di studi ai quali conviene fare riferimento in questo contesto è quello delle teorie dell'*autopoiesi,* collegato da alcuni alla cosiddetta cibernetica della cibernetica (o cibernetica di secondo grado) di Heinz von Foerster.

Il termine autopoiesi è legato all'attività scientifica e speculativa dei due scienziati cileni Humberto R. Maturana e di Francisco J. Varela. Maturana è nato nel 1928, ha

studiato medicina in Cile e in Inghilterra, e all'inizio della sua attività, negli anni Cinquanta, ha svolto significative ricerche di neurofisiologia della percezione negli Stati Uniti. È poi tornato in patria per insegnare all'Università di Santiago. Varela, nato nel 1946, ha studiato biologia in Cile e negli Stati Uniti, insegna all'Università di Santiago e all'Ecole Polytechnique di Parigi.

La nozione di autopoiesi viene introdotta da Maturana e Varela in rapporto al problema di che cosa sia un sistema vivente e, correlativamente, cosa sia un sistema non vivente. Maturana e Varela considerano condizione necessaria e sufficiente per la vita la presenza di un ciclo di influenze reciproche che si autosostenga, il quale può essere perturbato dall'esterno ma risponde alle perturbazioni con una propria autonoma evoluzione che tende a ripristinare la sua situazione intrinseca: in ciò consiste appunto l'autopoiesi.

Nel formulare questa teoria Maturana e Varela non sono solo biologi, ma anche epistemologi e filosofi. La loro teoria implica un contesto biologico, che consente (o meno) una conferma empirica, ma anche un ambito più vasto, relativo alla possibilità di formulare una teoria generale della conoscenza basata sulla nozione di autopoiesi.

L'impostazione adottata è legata al successo che hanno incontrato, in vari campi, le spiegazioni basate su catene chiuse di cause ed effetti, in confronto a quelle basate su catene aperte. Già in campo biologico si può far riferimento ai meccanismi di retroazione propri della regolazione omeostatica, considerati tra gli altri anche da Bertalanffy, da Manfred Eigen e da Heinz von Foerster, nonché da Walter Ross Ashby. Ma strutture «circolari» si incontrano anche nelle interpretazioni dei fenomeni di morfogenesi e di autoorganizzazione dei gruppi sociali, avanzate da F.A. von Hayek, nonché nella nozione tradizionale di autocoscienza psichica nei primati e nell'uomo e, passando agli aspetti che riguardano la conoscenza, nelle considerazioni sull'autoreferenza linguistica dei processi cognitivi

(W.V.O. Quine, O. Neurath) e sulla circolarità logica dei costrutti di assiomatizzazione formale della matematica (K. Gödel).

Si deve notare, peraltro, che questo carattere «chiuso» della catena di cause e di effetti, che costituisce la caratteristica essenziale, universale e invariante degli organismi viventi e la condizione necessaria e sufficiente della loro esistenza, non è in contraddizione con la teoria bertalanffiana del vivente come sistema aperto; quest'ultima, infatti, riguarda la struttura mentre il primo riguarda l'organizzazione del sistema.

Come per la cibernetica di Wiener e per la teoria generale dei sistemi di Bertalanffy, anche a proposito delle teorie basate sull'autopoiesi, si sono avute profonde differenze di atteggiamenti. Non sono mancate critiche, anche molto severe, specialmente sul piano più strettamente filosofico, sul quale si sono rilevate la possibilità di cadere nel solipsismo e la contraddizione fra una implicita metafisica idealistica e i presupposti deterministici e causalistici nonché il realismo gnoseologico professato in termini ingenui, come pure è apparsa spesso ingenua la tendenza a servirsi acriticamente di concetti e categorie sia scolastici sia positivistici.

D'altra parte le teorie basate sull'autopoiesi hanno trovato estimatori entusiasti, non solo nel campo più strettamente biologico, ma anche in quello delle estensioni potenziali di tale teoria; in particolare Stafford Beer la ritiene fondamentale per lo studio della società umana, considerata alla stregua di un sistema biologico; Gordon Pask sostiene che la teoria della chiusura organizzativa è di grande interesse in campo psicologico; altri la giudicano fondamentale anche per la psichiatria; infine Niklas Luhmann la considera una «superteoria» che comporta un vero e proprio mutamento di paradigma, con implicazioni molto importanti anche nel campo della teoria del diritto.

8.4 *Modelli cibernetici e retroazione*

Questa rassegna di nuove impostazioni scientifiche, che potremmo chiamare cibernetiche in senso lato, ha lo scopo di mettere in evidenza come, in ciascuna di esse, la retroazione abbia una grandissima importanza. In Wiener il termine «controllo» del sottotitolo del suo libro allude, infatti, proprio al controllo a retroazione; in Bertalanffy la retroazione è uno dei più semplici e, nello stesso tempo, dei più suggestivi fra i meccanismi di interazione fra le parti di un sistema; in Maturana e Varela l'autopoiesi è un vero e proprio ciclo di retroazione. Queste teorie però, hanno in comune anche la caratteristica di tendere a utilizzare questo strumento concettuale, la cui base è presente anche nella tecnologia, per interpretare non solo fenomeni biologici ma anche fenomeni relativi ad altre scienze dell'uomo e della società. A esempi di questo tipo, e cioè alla costruzione di modelli interpretativi riferiti alle scienze umane e alle scienze sociali sarà dedicato il seguito di questo capitolo.

Prima di procedere in questo senso si ritiene utile, però, spendere qualche parola per chiarire come uno schema a retroazione può essere considerato un modello cibernetico. Per farlo ci si riallaccia a un articolo di Dennis Gabor del 1955 intitolato, appunto, *I modelli nella cibernetica*. Gabor, come si è detto, interpreta la cibernetica come la «scienza delle attività orientate intenzionalmente al conseguimento di un obiettivo». I modelli cibernetici sono quindi, per lui, sistemi automatici (*automata*), ma non si deve pensare che qualsiasi macchina automatica possa costituire un modello cibernetico; non lo sono, in particolare, i meccanismi rigidamente programmati, come il famoso automa-giocattolo settecentesco a forma di anatra, né il telaio Jacquard. Ma non lo sono neppure, e la sua scelta di questo particolare esempio appare estremamente indicativa anche se va valutata in rapporto all'anno in cui fu fatta (1955), i calcolatori elettronici che, come egli dice, «sfor-

tunatamente sono spesso chiamati cervelli elettronici».

In conformità alla citata definizione di cibernetica, un modello cibernetico per Gabor deve essere capace di perseguire un obiettivo senza che il suo comportamento sia completamente predeterminato. È ovvio però che non tutti i modelli con caratteristiche di questo tipo sono da considerare equivalenti, e viene spontaneo istituire una gerarchia fra le macchine cibernetiche pensate come possibili modelli di sistemi naturali.

Al gradino inferiore si collocano macchine molto elementari, capaci di perseguire solo un obiettivo semplice e ben definito, entro un campo limitato di variazioni delle situazioni in cui si trovano a operare. L'esempio di Gabor a questo proposito è quello dei cosiddetti servomeccanismi di inseguimento, che possono raggiungere il risultato voluto anche se il movimento del bersaglio non è noto a priori ma varia con caratteristiche aleatorie, se viene attuata una strategia di evasione, e inoltre anche se mutano le condizioni ambientali o se ai segnali utili si sovrappongono rumori e disturbi.

A livelli più elevati si collocano automatismi capaci di perseguire scopi sempre più complessi, fino al caso di «macchine» la cui finalità sia quella di «sopravvivere» anche in presenza di condizioni ambientali molto mutevoli, per mezzo di un incessante processo di apprendimento. Gabor ritiene che sia possibile concepire anche ulteriori livelli, d'accordo con von Neumann, considerando la possibilità di macchine capaci di riprodursi e di evolvere. Nell'articolo citato egli si limita ancora però a considerare dispositivi che, all'epoca, erano già stati costruiti o avrebbero potuto facilmente essere attuati. In particolare, dopo i servomeccanismi, egli prende come esempi sistemi, come l'*omeostato di Ashby*, dotati di «ultrastabilità»; sistemi capaci di apprendimento, come il *topo di Shannon* (in grado di imparare ad attraversare un labirinto) e i *filtri ad apprendimento*, già studiati, a quel tempo, dallo stesso Gabor, e infine sistemi capaci di associazione (per i quali, alla

data, poteva citare il modello di sistema nervoso proposto da W.K. Taylor).

Il lavoro di Gabor ci appare certamente datato (e non potrebbe essere diversamente tenuto conto dei progressi dell'elettronica e dell'informatica intervenuti nel frattempo), ma è certamente valida, comunque, l'idea di inquadrare fra i modelli cibernetici, sia pure a livello elementare, le strutture a retroazione.

In proposito è forse il caso di ricordare brevemente quanto è stato detto nel capitolo dedicato ai modelli. Un modello deve spiegare l'evoluzione di un fenomeno nel tempo, o la sua distribuzione nello spazio. Se il fenomeno è molto semplice non si sentirà, usualmente, l'esigenza di darne un modello e, comunque, questo sarà più o meno coincidente con il sistema nel quale ha luogo il fenomeno considerato. Se il fenomeno è complicato sarà quasi sempre impossibile darne un modello che sia nello stesso tempo abbastanza semplice e sufficientemente realistico. Fra queste due situazioni estreme vi è però una gran quantità di fenomeni abbastanza complessi per i quali, tuttavia, non vi è motivo di rinunciare alla speranza di poterne dare un modello piuttosto semplice, purché scelto oculatamente e purché ci si accontenti di utilizzarlo per finalità interpretative (cioè come ausilio alla comprensione del fenomeno) anziché per finalità predittive.

Per valutare in che misura è realistica questa speranza è necessario, anzitutto, cercare di precisare che cosa si intenda per modello semplice: considereremo semplice un modello formato da un numero sufficientemente piccolo di parti e se le caratteristiche di queste parti, pur diverse fra loro, appartengono a un repertorio abbastanza limitato.

Da questa definizione risalta l'importanza degli schemi a retroazione che, per usare una felice espressione di C.H. Waddington, possono davvero essere concepiti come uno «strumento per pensare»: basta un repertorio molto ridotto di «pezzi» da combinare fra loro per costruire un mo-

dello. Se poi è consentito che questi pezzi si influenzino reciprocamente (formando una catena chiusa di azioni e reazioni) allora si possono ottenere molti comportamenti differenti fra loro e differenti anche da quelli dei pezzi combinati.

Ci si trova così in una situazione analoga a quella illustrata da Valentino Braitenberg nel suo libro *I veicoli pensanti* dove vengono confrontati l'atteggiamento «sintetico» e quello «analitico». Con il primo si concepisce un sistema artificiale, possibilmente semplice ma con qualche particolarità che renda il suo comportamento non elementare, si individuano sistemi naturali (generalmente complessi) che presentino quello stesso comportamento e si adotta il sistema artificiale come loro modello. Con il secondo atteggiamento si punta invece direttamente a costruire un modello la cui struttura sia suggerita dall'analisi del sistema naturale che si vuol rappresentare. In generale i modelli sintetici risultano molto più semplici (e anche più ricchi di suggerimenti interessanti).

Nel nostro caso, adottando l'atteggiamento sintetico possiamo considerare un certo numero di schemi semplici a retroazione, studiarne il comportamento e quindi proporli come modelli interpretativi per sistemi naturali che si comportino, almeno da qualche punto di vista, nello stesso modo. Per utilizzare la terminologia già adottata parlando di modelli, si può dire che, così facendo, si istituisce una analogia fra lo schema a retroazione e il sistema naturale che si comporta in modo simile. La somiglianza di comportamento costituisce dunque, per ipotesi, un'analogia positiva; la possibile corrispondenza dei meccanismi interni ai quali sono dovuti i comportamenti considerati costituisce, a priori, un'analogia neutra: fino a che falliranno i tentativi di falsificare l'ipotesi di corrispondenza di struttura interna, lo schema a retroazione costituirà un valido modello interpretativo del sistema con il quale lo si è posto in analogia.

8.5 *Una rassegna di modelli a retroazione*

Meritatamente noto è il lavoro di F.W. Lanchester *Mathematics in warfare* (La matematica della guerra), che risale a un periodo (la metà degli anni Cinquanta) in cui l'attenzione per i sistemi a retroazione era ancora ristretta quasi esclusivamente al campo tecnico e che tratta della modellizzazione dell'evoluzione di un conflitto militare. Qui si accennerà solo alla versione più semplice del modello di Lanchester. Dette y_1 e y_2 le consistenze di due eserciti contrapposti (che si considerano funzioni del tempo), si supponga che essi subiscano delle perdite (nell'unità di tempo) proporzionali alla consistenza dell'esercito avversario. In formule si ha quindi che la derivata rispetto al tempo di y_1 (cioè la sua tendenza a variare, nel caso specifico a diminuire) è proporzionale a y_2 e viceversa:

$$\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}t = -\, k_2\, y_2\,(t)$$
$$\mathrm{d}y_2/\mathrm{d}t = -\, k_1\, y_1\,(t)$$

dove i coefficienti k_1 e k_2 sono numeri positivi tanto più elevati quanto più sono micidiali gli armamenti degli eserciti. Alle due equazioni corrisponde lo schema di figura 8.1 in alto. Se si tiene conto anche delle sostituzioni delle perdite, indicate con $r_1(t)$ e $r_2(t)$, lo schema assume la forma di figura 8.1 in basso. Questo schema è molto simile alla forma semplificata del modello del sistema predatore-preda descritto nel paragrafo 7.2. In questo caso tuttavia i coefficienti k_1 e k_2 sono dello stesso segno, poiché ciascun esercito è predatore e preda nei confronti dell'altro esercito.

Il fatto che k_1 e k_2 abbiano lo stesso segno implica, in termini formali, che il sistema di equazioni presenta autovalori reali e opposti anziché immaginari e coniugati, come avviene nel caso di segno contrario. Questo implica che mentre nel modello predatore-preda il sistema tende a oscillare, nel modello dei due eserciti l'evoluzione libera

dy1
dt
∫
y1
−k2
−k1
∫
y2
dy2
dt
r1
+
∫
y1
−
k2
k1
−
∫
+
y2
r2

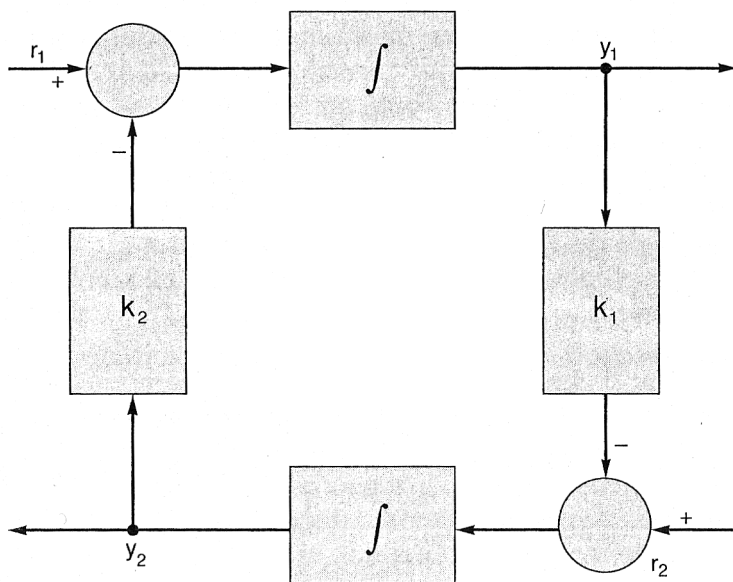
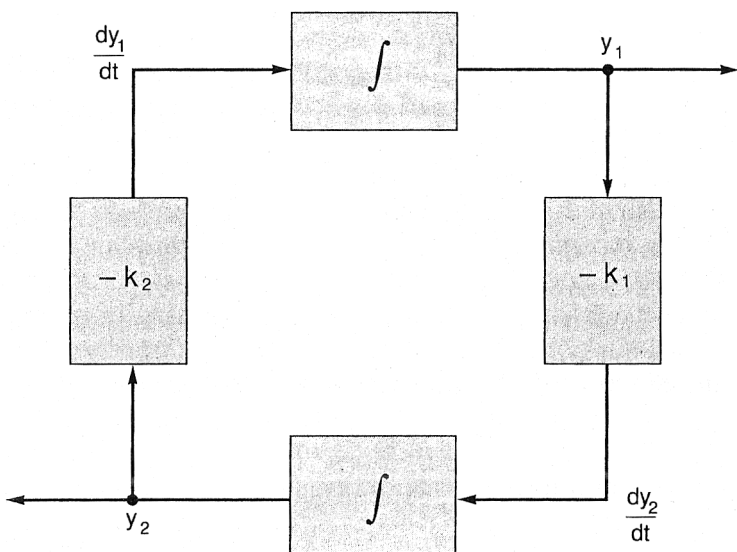



Fig. 8.1 Modello di Lanchester per l'evoluzione di un conflitto mondiale. Nel primo caso la variazione di ciascun esercito nel tempo è proporzionale all'entità dell'esercito avversario (*sopra*). Nel secondo si tiene conto anche delle sostituzioni delle perdite (*sotto*).

del sistema (quella in assenza di rimpiazzi) porta alla diminuzione di ciascuna delle forze in campo. Più precisamente la soluzione delle equazioni considerate, se per semplicità si trascurano alcuni termini, è rappresentata da curve del tipo rappresentato in figura 8.2. In questa figura si è supposto che l'esercito di consistenza $y_2(t)$, meno numeroso all'inizio del conflitto ($y_2(0) < y_1(0)$), sia dotato di un armamento più potente, che determina una diminuzione più rapida dell'esercito avversario. Il modello ha senso solo fino all'istante t^* in cui y_1 si annulla, in corrispondenza del quale y_2 ha un valore positivo che si mantiene poi costante. Il modello, naturalmente, può essere utilizzato anche tenendo conto del flusso delle nuove leve che compensano le perdite subite da ciascun esercito.

Un altro modello molto interessante, relativo sotto certi aspetti a una tematica dello stesso tipo, è quello che qualche anno dopo ha messo a punto L.F. Richardson. Il modello ha lo scopo di rappresentare in termini quantitativi i problemi connessi alla corsa al riarmo. Esso può essere riassunto come segue: si considera il caso di due sole potenze e si indicano con y_1 e y_2 i rispettivi livelli di armamento. Si suppone che tali livelli varino nel tempo in modo tale che le loro derivate risultino la somma algebrica di tre termini: uno positivo (cioè tale da determinare una tendenza all'aumento dell'armamento) proporzionale all'armamento dell'avversario, uno negativo, proporzionale al livello del proprio armamento, e infine un terzo termine che tiene in considerazione l'atteggiamento della potenza considerata nei confronti dell'altra e che, ovviamente, è positivo in caso di atteggiamento antagonistico e negativo in caso di atteggiamento di collaborazione. L'uso dei due aggettivi, positivo e negativo, si riferisce qui al loro signifi-

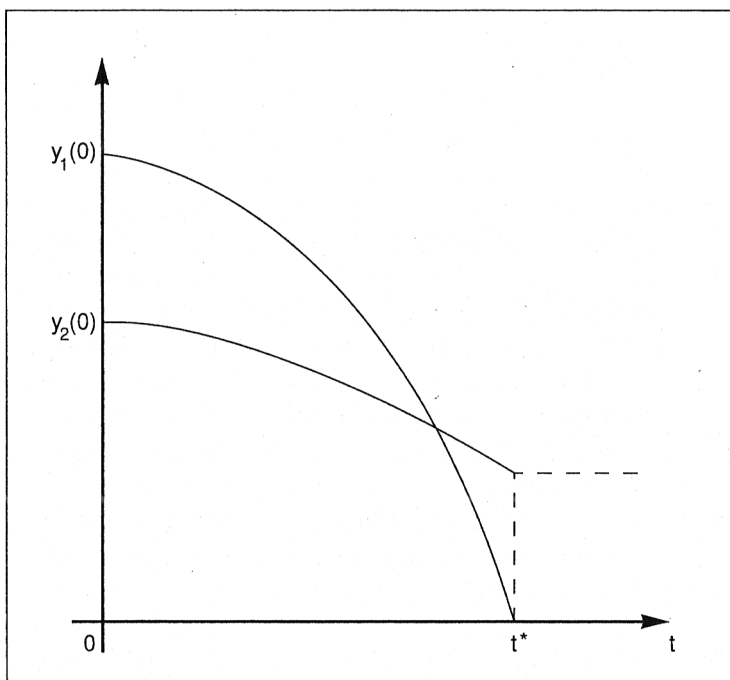



Fig. 8.2 Andamento della consistenza dei due eserciti descritti dal modello di Lanchester nel caso che l'esercito y_2 abbia consistenza inferiore all'esercito y_1 all'inizio del conflitto ma sia dotato di un armamento più potente. Il valore t^*, in corrispondenza del quale y_2 si annulla, rappresenta il limite temporale di validità del modello.

cato algebrico e non a quello morale. In formule si ha quindi:

$$\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}t = a_1 y_2(t) - b_1 y_1(t) + c_1$$
$$\mathrm{d}y_2/\mathrm{d}t = a_2 y_1(t) - b_2 y_2(t) + c_2$$

dove a_1 e a_2 sono i coefficienti (positivi) detti di *difesa*, b_1 e b_2 sono i coefficienti (anch'essi positivi, ma il termine è sottratto) detti di *costo* (si noti che l'uso di questa espressione mette in evidenza, in luogo del senso di sicurezza

che proviene da un livello ritenuto adeguato del proprio armamento, l'elemento di dissuasione nei riguardi di una politica di riarmo determinato dalle relative spese e dalla conseguente sottrazione di risorse ad altri impieghi); infine i parametri c_1 e c_2 sono detti coefficienti di *atteggiamento.* Alle equazioni corrisponde lo schema di figura 8.3 che mette in rilievo due sottosistemi a retroazione negativa (formati dagli integratori con gli elementi caratterizzati dai coefficienti b_1 e b_2) i quali interagiscono tra loro tramite i blocchi caratterizzati dai coefficienti a_1 e a_2, formando un anello a retroazione positiva. I parametri c_1 e c_2 svolgono la funzione di ingressi esterni.

Il modello consente di verificare che, nell'ipotesi di costanza di tutti i coefficienti, esiste una situazione di equilibrio in cui si ha:

$$y_1 = (a_1 c_2 + b_2 c_1) / (b_1 b_2 - a_1 a_2)$$
$$y_2 = (a_2 c_1 + b_1 c_2) / (b_1 b_2 - a_1 a_2)$$

Tale equilibrio può essere stabile o instabile; esso è stabile (cioè il transitorio conseguente a una perturbazione si smorza e il sistema si riporta verso la situazione precedente) se $b_1 b_2 > a_1 a_2$. È instabile in caso contrario, e il modello prevede allora una fase di crescita indefinita degli armamenti, che porta a livelli in corrispondenza dei quali le soluzioni possono essere o la guerra o una variazione dei parametri *a*, *b* e *c*.

È interessante notare che, in questa schematizzazione, il fatto che l'equilibrio sia stabile o instabile non dipende dai parametri c_1 e c_2, e cioè non dipende dall'atteggiamento antagonistico o cooperativo delle sue potenze. Tale atteggiamento, invece, influenza i valori di equilibrio, ciascuno dei quali, peraltro, dipende dall'atteggiamento di entrambe le potenze e a parità di atteggiamento è tanto più elevato quanto minore è la differenza fra il prodotto dei due coefficienti di costo e il prodotto dei due coefficienti di sicurezza.

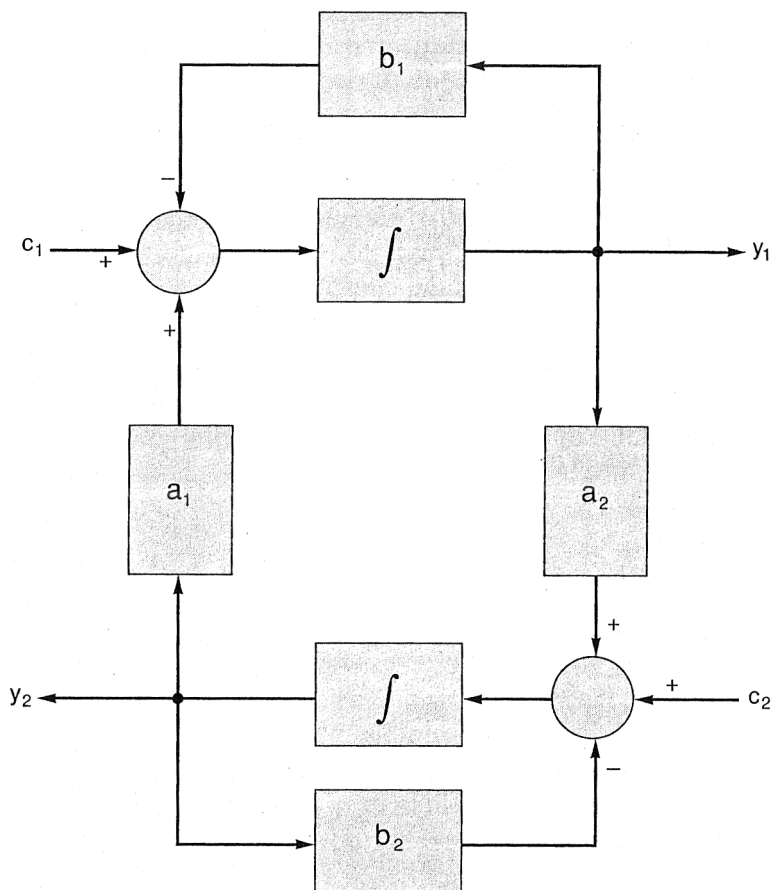



Fig. 8.3 Modello di Richardson per la corsa al riarmo. In ciascuna potenza la corsa al riarmo è considerata dipendere da tre fattori, il primo proporzionale alla potenza stessa, il secondo proporzionale alla potenza avversaria e il terzo costante.

I due modelli considerati, e particolarmente quest'ultimo, si prestano ad alcune interessanti riflessioni. Se non si attribuiscono adeguati valori numerici ai parametri essi potranno essere considerati, al più, come schemi concettuali di validità soltanto interpretativa, di scarso interesse. Nel campo delle scienze della natura il problema di stima

dei parametri si affronta ricorrendo agli esperimenti di *identificazione* o analizzando l'andamento che le varie grandezze in gioco assumono in un'evoluzione non perturbata del fenomeno allo studio. Nei casi considerati (e si farà espressamente riferimento al secondo) non si può certo pensare di eseguire esperimenti, e la messe di dati ricavabili dall'osservazione del singolo fenomeno non si presta adeguatamente alla determinazione dei parametri del modello. In particolare è arbitrario supporre che tutti i parametri si conservino costanti durante il periodo di osservazione e, comunque, è difficile individuare un criterio ragionevole e accettabile da tutti per quantificare fattori di carattere sostanzialmente psicologico come i coefficienti di atteggiamento c_1 e c_2.

Di fronte a una critica di stampo popperiano sarebbe dunque arduo sostenere il valore scientifico di questi modelli in quanto non è possibile falsificarli. Comunque vadano le cose si possono sempre trovare valori o andamenti dei parametri a, b e c che, inseriti nelle equazioni scritte, facciano sì che queste siano soddisfatte dall'andamento nel tempo delle quantità y_1 e y_2 che corrispondono all'andamento nel tempo effettivamente assunto dai livelli di armamento delle due potenze.

E tuttavia, guardando il problema da altri punti di vista, non sembra giusto concludere che il lavoro di modellizzazione considerato sia privo di interesse. Da un lato, infatti, il lavoro di formalizzazione (consistente nel tradurre in equazioni idee altrimenti espresse in termini di linguaggio corrente) obbliga a un utile sforzo di chiarificazione, di precisazione e di eliminazione di contraddizioni. Dall'altro consente, anche senza quantificarne i parametri, di trarre indicazioni di indubbio interesse, quali per esempio, nel caso specifico, quella relativa alla stabilità o instabilità dell'equilibrio e quella relativa al fatto che essa dipende dai parametri a e b e non dai parametri c.

Forti di queste considerazioni passiamo a illustrare altri modelli relativi alle scienze dell'uomo e della società.

Ci si limiterà solo a un rapido cenno agli studi di M. Maruyama sul carattere nazionale dei danesi e sull'algebra delle relazioni interpersonali. Nel primo si considerano atteggiamenti che favoriscono il manifestarsi di altri atteggiamenti nelle stesse persone; in maniera diretta o, più spesso, mediata, si determinano così delle catene chiuse che portano al rafforzamento reciproco degli atteggiamenti appartenenti alle catene di retroazione, in cui i valori dei parametri caratteristici determinano un fenomeno di crescita. Gli atteggiamenti così «rinforzati» confluiscono a formare il «carattere» tipico di gruppi più o meno numerosi di persone e, nel caso specifico, quello di un'intera nazione (non molto popolosa ma omogenea e con una lunga storia alle spalle quale è la Danimarca). Nel secondo studio si considerano invece atteggiamenti individuali che suscitano, per reazione, atteggiamenti diversi in altre persone; in questo caso il modello è del tipo «a stati finiti», in cui cioè non si ha a che fare, come negli esempi precedenti, con grandezze che assumono valori esprimibili mediante numeri reali, ma con grandezze alle quali si possono associare i simboli di un alfabeto finito. Il modello analizza il rapporto fra due persone, *A* e *B*, in cui l'atteggiamento assunto da *A* determina una certa reazione in *B*, questa reazione provoca a sua volta un nuovo atteggiamento di *A* e così via. Sotto opportune condizioni si può avere un comportamento ciclico che costituisce l'equivalente, per questo tipo di sistemi, delle oscillazioni (dette cicli limite) che si hanno in vari altri sistemi a retroazione (tipicamente nei modelli dei sistemi predatore-preda).

Con riferimento a problemi di questa stessa natura si consideri il modello rappresentato in figura 8.4 al quale ha lavorato uno degli autori di questo libro. Tale schema fa riferimento a due distinte motivazioni delle attività umane: quella legata a un obbligo (dovere morale o coercizione materiale, a seconda dei casi), commisurata a quello che tale attività «costa» (per esempio in termini di impegno o di fatica) e quella legata a un vantaggio, cioè alla va-

lutazione di quanto l'attività stessa rende a chi la svolge (in termine di soddisfacimento di sue esigenze). Nella figura 8.4 la motivazione «complessiva» è indicata con *m*: da questa dipende l'impegno *i*, che a sua volta determina la produzione *p*, frutto dell'attività svolta. La grandezza di retroazione b_1 costituisce una misura dell'impegno *i* e viene confrontata al valore di riferimento r_1 che rappresenta quanto ci venga richiesto in fatto di impegno (da norme morali o ideali o da chi esercita un potere sulla nostra attività); la differenza $r_1 - b_1$ è una delle due componenti della motivazione *m*. L'altra grandezza di retroazione b_2 corrisponde a quella parte della «produzione» *p* di cui può fruire il singolo individuo o il gruppo sociale che si sta considerando; r_2 rappresenta il livello delle esigenze destinate a essere soddisfatte con le risorse b_2. La differenza $r_2 - b_2$ costituisce, così, l'altro addendo della motivazione complessiva *m*. I blocchi rettangolari della figura 8.4 non sono caratterizzati solo da un coefficiente che lega il valore di uscita al valore d'ingresso; si tratta invece di blocchi che rappresentano sistemi dinamici nei quali, tipicamente, a una variazione brusca dell'ingresso corrisponde un adeguamento graduale dell'uscita fino a un livello di regime permanente che corrisponde al valore assunto dall'ingresso. Più in generale, il valore dell'uscita in ciascun istante non dipende solo dal valore dell'ingresso in quell'istante ma anche, e principalmente, dall'andamento dell'ingresso fino a quell'istante.

Il modello di figura 8.4 può essere utilizzato per schematizzare vari tipi di situazioni. Può, per esempio, rappresentare l'attività lavorativa in un settore della produzione svolta da uno strato sociale subalterno, oppure la situazione di uno studente per il quale nello studio giocano sia il desiderio di conseguire votazioni b_1 conformi a quelle, r_1, che la famiglia o l'ambiente gli propongono come obiettivo da raggiungere, sia l'esigenza di formarsi una cultura *p* da cui derivi una preparazione b_2 adeguata alle sue future esigenze professionali r_2. Infine la rischiosa attuazione di

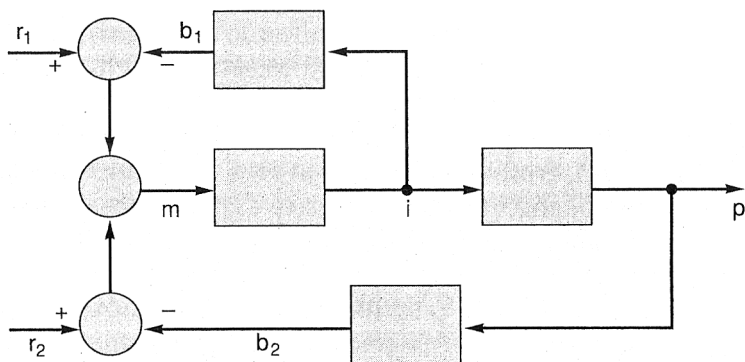



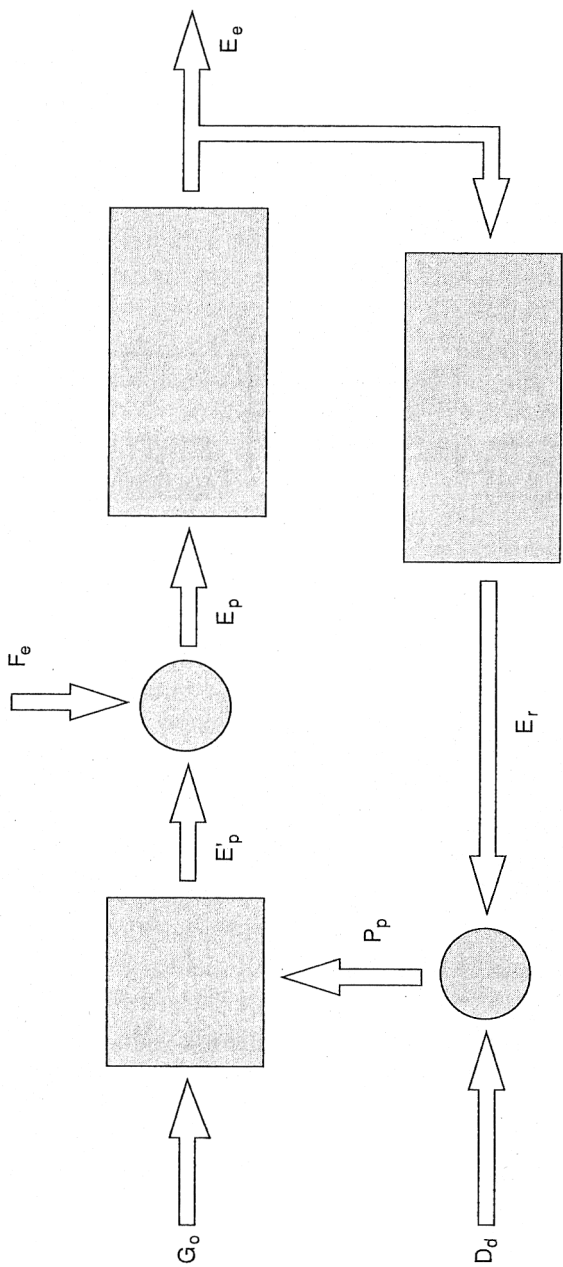
Fig. 8.4 Modello della motivazione. La motivazione complessiva m a svolgere un'attività è generalmente influenzata da due fattori: i vantaggi (r_1) che derivano da questa attività e i costi che essa comporta (r_2).

un'impresa militare per la quale, accanto al dovere e all'obbligo di attenersi agli ordini ricevuti r_1, possono giocare anche la considerazione dei vantaggi conseguenti al successo dell'azione stessa e quella degli inconvenienti derivanti dal suo fallimento.

L'interesse dello schema, oltre che dalla sua versatilità, deriva anche dalle conseguenze che se ne possono trarre in modo diretto, tenendo conto delle proprietà dei sistemi a retroazione. Sono così facilmente intuibili gli effetti dei diversi valori dei ritardi o dei tempi morti che, a seconda dei casi, si possono avere in vari punti delle catene di retroazione. Interessante è anche il fatto che le due differenze $r_1 - b_1$ e $r_2 - b_2$ si sommino per formare m, talché questa grandezza può avere lo stesso valore in situazioni in cui il peso relativo dei due addendi è sostanzialmente diverso. Così in una società schiavistica, dove r_1 corrisponde a una coercizione fisica (la frusta dell'aguzzino) e dove r_2 corrisponde al soddisfacimento dei bisogni più elementari per la sopravvivenza degli schiavi, si è in una situazione in cui r_1 è molto elevato rispetto a r_2. Non troppo diversa da questa è però la situazione di vari strati sociali (e non solo di

quello inferiore) in una società che potremmo chiamare «calvinistica» (con riferimento al legame che Max Weber ha messo in evidenza fra l'etica protestante e lo spirito del capitalismo): in questo caso il costume comunemente accettato comporta una sobria frugalità (valori bassi di r_2) ma impone, con una sanzione etico-religiosa, un elevato impegno di lavoro (valori alti di r_1). Diversa è invece la situazione di una moderna società consumistica, molto disincantata in fatto di «dovere morale» del lavoro (bassi valori di r_1) ma nella quale la valutazione soggettiva dei bisogni risulta enormemente e, in molti casi, artificiosamente accresciuta (alti valori di r_2).

A due degli autori del modello di figura 8.4 è dovuto anche un modello di comportamento elettorale in cui la retroazione svolge un ruolo di rilievo. Questo modello, per gli aspetti che qui interessano, può essere rappresentato in forma semplificata e schematica come in figura 8.5, dove, secondo una convenzione abituale, si usano frecce di un certo spessore per rappresentare insiemi ordinati di grandezze (vettori) mentre nelle figure precedenti si utilizzavano linee orientate (sottili) per rappresentare grandezze singole. In questo modello si suppone che ciascuno dei gruppi di opinione in cui è diviso l'elettorato (e che formano il vettore G_o) si ripartisca fra i vari partiti, in base alle posizioni politiche dei partiti stessi (il cui insieme ordinato costituisce il vettore P_p). Risulta così determinato un vettore E'_p le cui componenti rappresentano la parte più rilevante dell'elettorato potenziale di ciascun partito; questo è influenzato infatti anche da fattori esterni F_e, connessi per esempio alla politica internazionale o a eventi che colpiscono emotivamente i votanti. L'andamento nel tempo dell'elettorato effettivo di ciascun partito (il cui insieme forma il vettore E_e) non coincide con quello potenziale, ma tende ad adeguarsi a esso con gradualità e con un certo ritardo, dovuto a varie motivazioni psicologiche. Infine le posizioni P_p dei partiti dipendono sia da decisioni autonome della rispettiva dirigenza (rappresentate dal vettore

E_e
F_e
E_p
E'_p
G_o
P_p
E_r
D_d

D_d), sia da un effetto di retroazione E_r legato ai risultati elettorali effettivi E_e. È frequente, infatti, che, specialmente in caso di insuccesso elettorale, un partito modifichi la propria posizione. La figura 8.5 mostra che il risultato elettorale effettivo E_e dipende da come è venuta evolvendo la società e, quindi, dalla consistenza dei gruppi di opinione in cui essa si articola, da fattori esterni e da decisioni di modifica della politica del singolo partito, ma anche che si ha un meccanismo di retroazione per effetto del quale le posizioni politiche dei partiti P_p dipendono anche (e in misura non trascurabile) dall'evoluzione del loro elettorato E_e.

È stato osservato che uno dei motivi che determinano l'interesse per gli schemi interpretativi a retroazione (motivo di natura tipicamente filosofica e metodologica) consiste nel fatto che tali schemi possono consentire un'interpretazione meccanicistica (cioè in cui gli effetti dipendono solo da cause *efficienti*, per utilizzare la terminologia tradizionale, di derivazione aristotelico-scolastica) di fenomeni in cui si ha, almeno apparentemente, un comportamento finalistico, cioè orientato al conseguimento di determinati obiettivi e in cui quindi gli effetti appaiono influenzati da cause *finali.* Questo è tipicamente il caso dei modelli «cibernetici» a retroazione dell'omeostasi, di tropismo e di altri comportamenti spesso caratterizzati con l'espressione inglese *goal seeking* (ricerca di obiettivi).

In questi casi si tratta però di un inteesse che potrebbe essere considerato di natura eminentemente filosofica nei riguardi dell'impiego di un modello a retroazione per l'interpretazione di fenomeni che, in quanto tali, sono oggi oggetto di interesse delle scienze della natura.

La retroazione, però, può fornire anche suggerimenti

Fig. 8.5 Modello di comportamento elettorale. (In questo schema vengono usate delle frecce più spesse perché le grandezze rappresentate sono vettoriali.)

su come schematizzare problemi che sono oggetto esclusivo della riflessione filosofica. Lo si illustrerà con riferimento alla dialettica di tesi, antitesi e sintesi secondo la tradizionale *vulgata* dell'idealismo hegeliano. Secondo quest'ultima, la dialettica consiste nel porre un concetto astratto e limitato (*tesi*), nel sopprimere questo concetto come alcunché di finito, passando al suo opposto (*antitesi*) e infine alla *sintesi* delle due precedenti determinazioni che conserva ciò che in ciascuna di esse vi è di valido e, nel contempo, supera l'una e l'altra. Hegel parla, in effetti, di momento intellettuale, di momento dialettico e di momento speculativo (o positivo razionale); la dialettica è legata al complesso del movimento ed è contemporaneamente, per l'identità di razionale e reale, non solo l'anima del progresso scientifico ma anche quella del divenire della realtà. Tutta la realtà si muove e *diviene* dialetticamente, e perciò dappertutto vengono individuate triadi di tesi, antitesi e sintesi, nelle quali l'antitesi costituisce la negazione o l'opposto rispetto alla tesi e la sintesi la ricostruzione dell'unità e l'inveramento dell'una e dell'altra.

Il punto, ora, non è quello di accertare in che misura questo modo di presentare le cose corrisponda al pensiero di Hegel, il che è stato messo in dubbio. Per esempio, G.E. Mueller ha sostenuto che si tratta di una leggenda, diffusa da Marx e che a lui proverrebbe da H.H. Chalybäus. La triade di termini tesi-antitesi-sintesi, come è noto di provenienza fichtiana, non si troverebbe affatto in Hegel, che anzi la rifiuta come *geistlose Schema* (schema insulso) nella prefazione alla *Fenomenologia dello spirito* e nel capitolo su Kant della *Storia della filosofia.*

Comunque stiano le cose, lo schema dialettico tesi-antitesi-sintesi costituisce un luogo comune nella divulgazione di molto pensiero moderno, particolarmente dei vari filoni più o meno ortodossi dell'idealismo e del marxismo ed è a questa versione «popolare» che ci riferiremo.

A proposito di questa si può infatti adottare lo schema funzionale di figura 8.6 in alto) in cui il processo che porta

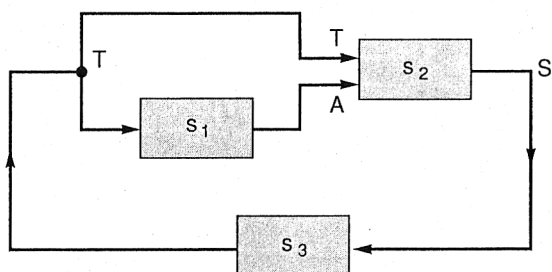
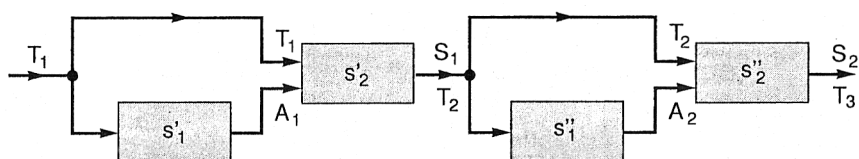
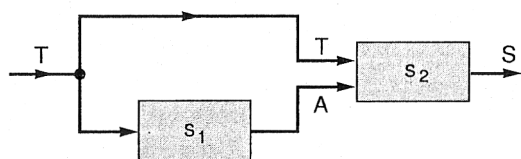



Fig. 8.6 Schematizzazione della dialettica tesi-antitesi-sintesi. L'ingresso del sistema (la tesi) si divide in due ramificazioni, una delle quali destinata a trasformarsi in antitesi, ed entrambe concorrono a costituire la sintesi (*sopra*). Se si considera il processo dialettico come un continuo, la sintesi in uscita dal primo sistema costituisce anche la tesi di un secondo (*al centro*). La retroazione permette di rappresentare il processo come una catena indefinita, dove la sintesi viene riproposta in ingresso dello stesso blocco con la funzione di nuova tesi (*sotto*).

dalla tesi *T* all'antitesi *A* è schematizzato dal blocco s_1 e quello che porta dalla tesi *T* e dall'antitesi *A* alla sintesi *S* è schematizzato dal blocco s_2. Secondo la versione accennata, però, il processo dialettico è qualche cosa di continuo, in cui la sintesi raggiunta in una prima fase si ripropone come una nuova tesi, che suscita la propria antitesi e si combina con questa dando luogo a un'ulteriore sintesi e così via indefinitamente. La situazione fermandosi al secondo stadio della catena è rappresentata dalla figura 8.6 al centro). Il risultato finale però deve essere una catena indefinita, in cui la grandezza di uscita costituisce la grandezza di ingresso di un'altra struttura identica. Questo suscita un richiamo immediato nella memoria di chi si occupa di retroazione: si tratta del procedimento, illustrato nel terzo capitolo, per il quale la ripetizione di un algoritmo può essere rappresentata da un flowchart a ciclo. Lo stesso ciclo adottato in questo caso porta allo schema di figura 8.6 in basso): la sintesi *S* viene riportata, con un processo rappresentato dal blocco s_3, come tesi in ingresso dello stesso schema, rispetto al quale il blocco s_3 viene quindi a trovarsi in retroazione.

La retroazione interpreta così in modo suggestivo il processo dialettico, spiegando anche la proprietà secondo la quale nel passaggio da tesi e antitesi alla sintesi, il porsi della sintesi come una nuova tesi non è da considerare un momento di una successione temporale, ma di una successione logica. Nello stesso tempo permette di intuire la compatibilità di un tal modo di vedere con i non pochi esempi in cui, nel divenire storico, si passa da posizioni inizialmente assunte a posizioni contrastanti e opposte, tendendo poi a una posizione più equilibrata in qualche modo intermedia, che conservi gli aspetti positivi di ciascuna delle due precedenti.

Un comportamento di questo tipo infatti è caratteristico dei sistemi a retroazione quando, proprio per effetto della retroazione, si ha uno smorzamento delle oscillazioni (che non sarebbe spiegabile considerando separata-

mente le due parti del sistema che retroagiscono l'una sull'altra ma che la teoria della retroazione spiega chiaramente).

Questo modo di ragionare può apparire suggestivo ma discutibile nei casi in cui le entità in gioco (*T*, *A* e *S*) non sono quantificabili. Risulta invece più appropriato nel caso, accettabile anche nel quadro delle concezioni hegeliane e tipico della problematica della «dialettica della natura» di Engels e delle varie versioni più o meno ufficiali del materialismo dialettico in Unione Sovietica, in cui *T*, *A* e *S* corrispondono a grandezze fisiche, o comunque a grandezze alle quali si possono associare valori numerici. In questi casi *T*, *A* e *S* sono funzioni del tempo e ognuno dei tre blocchi di figura 8.6 in basso) viene associato alla relazione funzionale che lega il suo ingresso alla sua uscita.

Schemi basati su un procedimento che si ripete indefinitamente (e che può essere interpretato mediante uno schema a retroazione) si incontrano forse più di frequente di quanto si pensi. Per illustrarne ancora un solo caso (e concludere così questa serie ormai molto lunga di esempi) se ne citerà uno che ha il pregio di riportarci in un campo, quello dell'analisi delle attività mentali, molto legato alla cibernetica (che costituisce il filo rosso di questo capitolo). Si farà riferimento, in particolare, alle idee in proposito del fisiologo John C. Eccles, che presentando e discutendo le posizioni di Popper si serve, per illustrare le interazioni fra «Mondo 2» e «Mondo 3» (come concepiti da Karl Popper) di una figura (che qui si riporta un po' semplificata in figura 8.7) e che Eccles illustra con le seguenti parole: «Da ciascuna posizione nel 2° mondo un freccia porta, attraverso il livello corrispondente del 3° mondo, a un livello più alto e più ampio, che rappresenta simbolicamente una crescita culturale dell'individuo. Reciprocamente, le risorse culturali dell'io (3° mondo) influiscono retroattivamente sul 2° mondo, elevando la coscienza dell'io stesso a un livello superiore e più ampio (2° mondo)...» Nelle concezioni di Popper il «Mondo 1» è il mondo fisi-

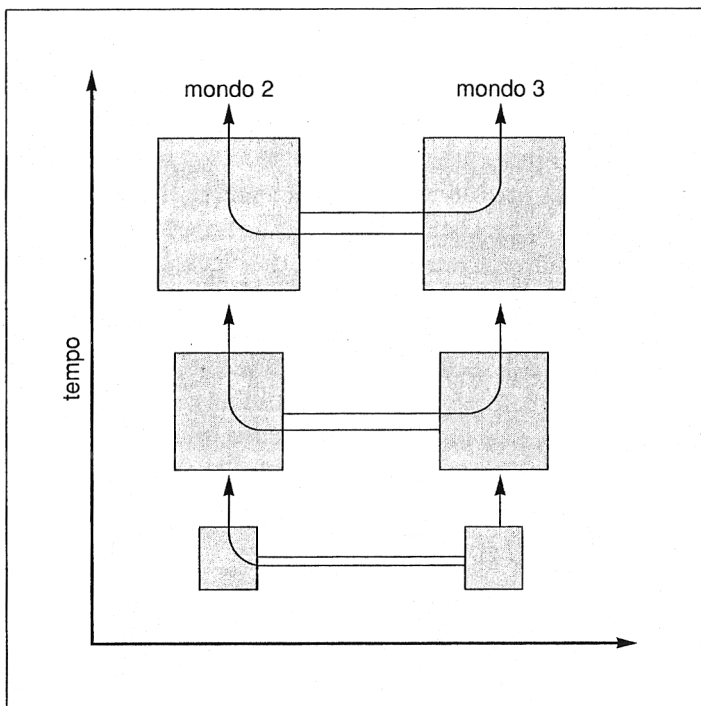



Fig. 8.7 Schema delle interazioni tra i mondi nella concezione di Popper.

co, cioè l'universo delle entità fisiche, il «Mondo 2» è il mondo degli stati mentali, comprendente gli stati di coscienza, le disposizioni psicologiche e gli stati inconsci e il «Mondo 3» è il mondo dei contenuti di pensiero o, per meglio dire, dei prodotti della mente umana.

Eccles, come si vede, usa la parola «retroattivamente» e tuttavia nella figura 8.7 non è presente un ciclo di retroazione, ma uno schema che vuole suggerire una successione indefinita di processi di crescita e arricchimento reciproco. Ciò probabilmente è dovuto al fatto che uno schema di questo tipo viene considerato più efficace e suggestivo. Tuttavia un'analisi un po' attenta porterebbe a qualche

perplessità, non tanto per l'impossibilità di dare un significato preciso alle ascisse, quanto per l'inevitabile ma arbitraria discretizzazione della scala temporale delle ordinate, e per gli equivoci impliciti nell'uso di frecce che seguono un percorso prima orizzontale e poi verticale. Molto più corretto, nella sua semplicità, sarebbe stato uno schema con un semplice anello di retroazione in cui il «Mondo 2» influenza il «Mondo 3» e viceversa (rimanendo comunque possibili le influenze dall'esterno che inneschino e modifichino il processo). Uno schema con più anelli di retroazione potrebbe dar conto anche delle relazioni più articolate dei due mondi considerati con il «Mondo 1», in oggetti del quale, per usare le stesse parole di Popper, si incarnano molti oggetti del «Mondo 3», «come i libri, le nuove medicine sintetiche, i calcolatori o un aereo».

Che questi schemi a retroazione possano spiegare meglio di altri i fenomeni «complessi» (intesi nel senso bertalanffyano come fenomeni non interpretabili adeguatamente con il solo metodo analitico che li decompone in parti da considerare separatamente) può anche essere solo una convinzione basata su una sorta di deformazione professionale di chi ha acquistato una certa familiarità con queste strutture perché esse costituiscono uno strumento abituale del suo lavoro di ingegnere, matematico o biologo. Resta però fuori discussione che una più diffusa conoscenza della retroazione, anche al di fuori dell'ambito tecnico in cui spesso è relegata, potrebbe costituire un valido aiuto per la formulazione e la comprensione di molti problemi, ed è in base a questa convinzione che gli autori sperano, a conclusione del loro lavoro, che questa idea possa essere accolta dai lettori.

Bibliografia

I numeri tra parentesi accanto al nome dell'autore, per alcune edizioni italiane di opere di autori stranieri, si riferiscono alla data della prima edizione originale.

Capitolo 1

J.H. Milsum (a c. di), *Positive feedback, a general system approach to positive/negative feedback and mutual casuality*, Pergamon Press, Oxford, 1968.

I. Prigogine, I. Stenger e G. Nicolis, *Controllo/Retroazione*, in *Enciclopedia*, vol. 3, Einaudi, Torino, 1978.

Per chi desidera approfondire gli aspetti formali della teoria dei sistemi dinamici e della teoria del controllo a retroazione si citano alcuni testi di livello universitario pubblicati in Italia da autori italiani:

E. Fornasini e G. Marchesini, *Appunti di teoria dei sistemi*, Libreria Progetto, Padova, 1988[2].

A. Isidori, *Sistemi di controllo*, Siderea, Roma, 1979.

A. Lepschy e A. Ruberti, *Lezioni di controlli automatici - Teoria dei sistemi lineari e stazionari*, Siderea, Roma, 1967[2].

A. Lepschy e U. Viaro, *Guida allo studio dei controlli automatici*, Pàtron, Bologna, 1983.

G. Marro, *Fondamenti di teoria dei sistemi*, Pàtron, Bologna, 1976.

G. Marro, *Controlli automatici*, Zanichelli, Bologna, 1978, 1988[3].

G. Marro, *Teoria dei sistemi e del controllo*, Zanichelli, Bologna, 1989.

S. Rinaldi, *Teoria dei sistemi*, Hoepli - CLUP, Milano, 1973.

A. Ruberti e A. Isidori, *Teoria dei sistemi*, Boringhieri, Torino, 1979.

E. Volta, *Controlli automatici - Principi generali e guida alle applicazioni*, ETAS Libri, Milano, 1974.

Capitolo 2

S.A. Bedini, *The role of automata in the history of technology*, «Technology and Culture», v, 1, 24-42, 1964.
S. Bennet, *A history of control engineering 1800-1930*, Peter Peregrinus, Londra, 1979.
H.S. Black, *Stabilized feedback amplifiers*, «Bell System Technical Journal», xiii, 1, 1-13, 1934.
H.W. Bode, *Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design*, «Bell System Technical Journal», xiii, 7, 421-454, 1940.
H.W. Bode, *Feedback, the history of an idea*, Atti del convegno *Active Networks and Feedback Systems*, Polytechnic Press, New York, 1-17, 1960.
C.M. Cipolla (1967), *Le macchine del tempo*, Il Mulino, Bologna, 1981.
P. Cossa, *La cybernétique. Du cerveau humain aux cerveaux artificiels*, Masson, Parigi, 1957².
P. De Latil (1953), *Il pensiero artificiale. Introduzione alla cibernetica*, Feltrinelli, Milano, 1962.
H.A. Lloyd, *Giovanni de Dondi's Horological Masterpiece, 1364*, edito a c. dell'autore, Limpsfield, 1954.
H.A. Lloyd, *Some outstanding clocks over seven hundred years, 1250-1750*, Leonard Hill, Londra, 1958.
J.C. Maxwell, *On Governors*, «Proceedings of the Royal Society», Londra, xvi, 270-283, 1868.
O. Mayr, (1969) *The origins of feedback control*, MIT Press, Cambridge, 1970.
H. Nyquist, *Regeneration theory*, «Bell System Technical Journal», xi, 1, 120-147, 1932.
M.D. Rubin, *History of technological feedback*, in J.H. Milsum (a c. di), *Positive feedback. A general system approach to positive/negative feedback and mutual causality*, Pergamon Press, Oxford, 1968.

Capitolo 3

G. Guardabassi, *Large-scale problem analysis and decomposition theory*, «Journal of the Franklin Institute», cccvi, 1, 41-62, 1978.
D.S. Scott, *The lattice of flow diagrams*, in E. Engeler (a c. di), *Symposium on semantics of algorithmic languages*, «Lecture

Notes in Mathematics», 188, 311-372, Springer, Berlin, 1971.
W. Thomson, *On an instrument for calculating the integral of the product of two given functions*, «Proceedings of the Royal Society», Londra, XXIV, 266-268, 1876.
W. Thomson, *Mechanical integration of the linear differential equations of the second order with variable coefficients*, «Proceedings of the Royal Society», Londra, XXIV, 269-271, 1876.
W. Thompson, *Mechanical integration of general linear differential equation fo any order with variable coefficients*, «Proceedings of the Royal Society», Londra, XXIV, 271-273, 1876.

Capitolo 4

C. Cobelli e A. Lepschy, *Modelli matematici in medicina sperimentale e in medicina clinica*, in C. Scandellari e G. Federspil (a c. di), *Scoperta e diagnosi in medicina*, Piccin, Padova, 1983.
L. Geymonat e G. Giorello, *Modello*, in *Enciclopedia*, vol. 9, Einaudi, Torino, 1980.
A. Lepschy, *Modelli interpretativi e modelli predittivi*, «Scienza e Cultura», 8, 17-40, 1985.
A. Rosenblueth e N. Wiener, *Il ruolo dei modelli nella scienza* in V. Somenzi e R. Cordeschi (a c. di), *La filosia degli automi*, Boringhieri, Torino, 1986.
R. Thom, *D'un modèle de la science à une science des modèles*, «Synthese», XXXI, 2, 359-374, 1975.
R. Thom, *Modélisation et scientificité*, in P. Delattre e M. Thellier (a c. di), *Elaboration et justification des modèles (Applications en Biologie)*, vol. 1, Maloine, Parigi, 1979.

Capitolo 5

I. Prigogine, I. Stengers e G. Nicolis, cit.

Capitolo 6

R.G.D. Allan, *The structure of macro-economic models*, «The Economic Journal», LXX, 3, 38-51, 1960.
C. Cobelli, A. Lepschy e S. Milo, *Modelli sistemistici di alcuni fenomeni descritti dalle teorie economiche*, Atti e Memorie

dell'Accademia Patavina di SS.LL.AA., XC (1977-78), 21-31, 1979.
J.W. Forrester, *Comportamento controintuitivo dei sistemi sociali*, in AA.VV., *Verso un equilibrio globale*, Mondadori, Milano, 1973.
R.M. Godwin, *The nonlinear accelerator and the persistence of the business cycle*, «Econometrica», XIX, 1, 1-17, 1951.
J.R. Hicks, *A contribution to the theory of the trade cycle*, Clarendon Press, Londra, 1950.
N. Kaldor, *A model of the trade cycle*, «The Economic Journal», L, 3, 78-92, 1940.
O. Lange, *Introduzione all'economia cibernetica*, Boringhieri, Torino, 1977.
O. Lange, *La parte e il tutto. Una teoria generale di comportamento dei sistemi*, Rosenberg & Sellier, Torino, 1981.
G.W. Low, *The multiplier-accelerator model of business cycles interpreted from a system dynamics perspective*, in J. Randers (a c. di), *Elements of the system dynamics method*, MIT Press, Cambridge, 1980.
A.W. Phillips, *Stabilisation policy in a closed economy*, «The Economic Journal», LXIV, 6, 290-323, 1954.
A.W. Phillips, *Stabilisation policy and time-forms of lagged responses*, «The Economic Journal», LXVII, 6, 265-277, 1957.
P. Samuelson, *Interaction between the multiplier analysis and the principle of acceleration*, «Review of Economic Statistics», XXI, 5, 75-79, 1939.
P.A. Samuelson, *Fondamenti di analisi economica*, Il Saggiatore, Milano, 1973.
P.A. Samuelson, *Economia*, Zanichelli, Bologna, 1983.
W. Siwinski, *Accumulazione*, in *Enciclopedia*, vol. 1, Einaudi, Torino, 1977.

Capitolo 7

W.S. Beck, *Regolazione*, in *Enciclopedia*, vol. 11, Einaudi, Torino, 1980.
W.B. Cannon, *La saggezza del corpo*, Bompiani, Milano, 1956.
E.R. Carson, C. Cobelli e L. Finkelstein, *The mathematical modeling of metabolic and endocrine systems*, Wiley, New York, 1983.
A.J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams and Wilkins, Baltimora, 1925.

P. Omodeo, *Omeostasi*, in *Enciclopedia del Novecento*, vol. 4, Istituto della enciclopedia italiana, Roma, 1979.
M. Smith, *L'ecologia e i suoi modelli*, Mondadori, Milano, 1975.
V. Volterra, *Variazioni e fluttuazioni del numero di individui in specie animali conviventi*, Memorie Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, serie VI, vol. 2, fasc. 3, 31-113, 1926.
V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* Gauthier-Vilars, Parigi, 1931.
E.O. Wilson e W.H. Bossert, *Introduzione alla biologia delle popolazioni*, Piccin, Padova, 1974.

Capitolo 8

W.R. Ashby, *Progetto per un cervello*, Bompiani, Milano, 1970.
W.R. Ashby, *Introduzione alla cibernetica*, Einaudi, Torino, 1971.
L. von Bertalanffy, *Teoria generale dei sistemi*, ILI, Milano, 1971; Mondadori, Milano, 1983.
S. Beer, *Preface*, in H.R. Maturana e F.J. Varela, *Autopoiesis and cognition: the realization of the living*, Reidel, Dordrecht, 1980. Trad. it.: *Autopoiesi e cognizione*, Marsilio, Venezia, 1985.
V. Braitenberg, *I veicoli pensanti*, Garzanti, Milano, 1984.
C. Cobelli, G. Langella e A. Lepschy, *A system approach to the modeling of voting behaviour* in J. Gutenbaum e M. Niezgodka (a c. di), *Applications of system theory in economics, management and technology*, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Varsavia, 1980.
C. Cobelli, A. Lepschy e S. Milo, *A tentative model of the dynamic behaviour of a society*, in R. Trappl e F. de Hamika (a c. di), *Progress in cybernetics and system research*, vol. 5, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1979.
A. Cuzzer, *La cibernetica come teoria dell'informazione*, in *Convegno di Elettronica e Televisione (Milano, 12-17 aprile 1954)*, suppl. a «La Ricerca Scientifica», CNR, XXIV, 1164-1169, 1955.
H. Drischel, *Einführung in die Biokibernetik*, Akademie Verlag, Berlino, 1973.
J. C. Eccles, *Mente*, in *Enciclopedia del Novecento*, vol.4, Istituto della enciclopedia italiana, Roma, 1979.
H. von Forester, *Observing Systems*, Intersystems Publications, Seaside, 1984.

D. Gabor, *Models in cybernetics*, in *I modelli nella tecnica*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, vol. 2, 1955.
F.W. Lanchester, *Mathematics in warfare*, in *The world of mathematics*, Simon & Schuster, 1956.
A. Lepschy, *La retroazione; una tecnica e uno «strumento per pensare»*, «Scienza e Cultura», 6, 159-214, 1983.
A. Lepschy, *Riflessioni su modelli cibernetici e retroazione (feedback)*, Atti e Memoria dell'Accademia Patavina di SS.LL.AA., XCVI (1983-84), parte II, 5-30, 1984.
M. Maruyama, *The multilateral mutual causal relationships among the modes of communication, sociometric pattern and the intellectual orientation in the Danish culture*, «Philon», XII, 1, 41-58, 1961.
M. Maruyama, *Algebra of interpersonal interaction*, «Methodos», XIII, 25-36, 49-50, 1962.
H.R. Maturana e F.J. Varela (1980), *De màquinas y seres vivos*, Editorial Universitaria, Santiago, 1973.
H.R. Maturana e F.J. Varela, *L'albero della conoscenza*, Garzanti, Milano, 1987.
J.C. Maxwell, cit
G.E. Muller, *The Hegel legend of «thesis-antithesis-synthesis»*, «Journal of the History of Ideas», XIX, 3, 411-414, 1958.
G. Pask, *Organizational closure of potentially conscious systems*, in M. Zeleny (a c. di), *Autopoiesis. A theory of living organisation*, North Holland, Amsterdam, 1981.
K.R. Popper e J.C. Eccles (1977), *L'Io e il suo cervello*, Armando, Roma, 1981.
L.F. Richardson, *Arms and insecurity*, Stevens & Sons, 1960.
V. Somenzi e R. Cordeschi, cit.
R. Trappl (a c. di), *Cybernetics - Theory and applications*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1983.
N. Wiener (1948), *La cibernetica*, Bompiani, Milano, 1953; Il Saggiatore, Milano, 1968.
N. Wiener (1953), *Introduzione alla cibernetica*, Einaudi, Torino, 1953.
N. Wiener, *I am a mathematician*, Doubleday, Garden City, 1956.
D. Zolo, *Autopoiesis - Un paradigma conservatore*, «MicroMega», 1, 129-173, 1986.

Indice